

Zur Kinematik des Rollgleitens

Von Gerhard Grüß † in Freiberg

Zur Klärung der kinematischen Verhältnisse beim Rollgleiten werden die beiden Polkurvenscharen, die raumfesten Spurkurven und die für den sich bewegenden Körper, körperfesten Rollkurven für alle Bewegungszustände vom reinen Gleiten bis zum reinen Rollen bestimmt.

To investigate the kinematic relations of roll-gliding, the sets of the two polecurves — the fixed polecurves as well as the movable polecurves of the moving solid — are evaluated for all states of motion, from absolute gliding to absolute rolling.

Pour éclairer les conditions cinétiques du glisser roulant les deux faisceaux de courbes polaires, les traces fixes aussi que les courbes roulantes du corps mouvant, sont déterminées pour tout état de mouvement depuis le rouler pur jusqu'au glisser pur.

С целью исследования кинематики катания со скольжением определяются для всех случаев движения от чистого скольжения до чистого катания оба семейства направляющих кривых линии следа на плоскости катания и связанные с движущимся телом линии катания.

1. Problemstellung

Viele Bewegungen, denen in der Technik eine gewisse Bedeutung zukommt, sind als ein aus Rollen und Gleiten gemischter Vorgang zu verstehen, der hier als „Rollgleiten“ bezeichnet werden soll; man denke etwa an die Anfangsbewegung der Triebräder einer Lokomotive auf glatter Schiene oder an die gegenseitige Bewegung der Zähne zweier Zahnräder. Das ebene Rollgleiten eines starren Körpers an einem zweiten, der als raumfest angesehen werden soll, kommt dadurch zustande, daß eine mit dem beweglichen starren Körper festverbundene Kurve \mathcal{C} an einer mit dem raumfesten Körper verbundenen Schiene C teils abrollt und teils gleitet. Im folgenden soll versucht werden, zur Kenntnis der kinematischen Verhältnisse dieses Bewegungstypus dadurch beizutragen, daß die beiden Polkurven, die raumfeste Spurkurve und die körperfeste Rollkurve, des im Rollgleiten befindlichen Körpers bestimmt werden. Dazu ist zunächst die Fragestellung mathematisch zu präzisieren.

Die glatte, reelle Kurve C sei in der festen x, y -Ebene mit Hilfe ihrer Bogenlänge s als Parameter durch die Gleichungen

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \quad \dots \quad (1)$$

bestimmt. Entsprechend sei in einer zweiten Ebene, die gegenüber der x, y -Ebene beweglich und durch das kartesische Koordinatensystem ξ, η orientiert zu denken ist, die glatte Kurve \mathcal{C} mit der Bogenlänge \bar{s} gegeben:

$$\xi = \xi(\bar{s}), \quad \eta = \eta(\bar{s}), \quad \left(\frac{d\xi}{d\bar{s}}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\bar{s}}\right)^2 = 1 \quad \dots \quad (2),$$

wobei das Koordinatensystem so gewählt sei, daß der Punkt $\bar{s} = 0$ von \mathcal{C} Koordinatenanfangspunkt und die ξ -Achse Tangente im Punkt $\bar{s} = 0$ sein möge, eine Voraussetzung, durch die ja die Allgemeinheit der Fragestellung nicht eingeschränkt wird (Bild 1):

$$\xi(0) = \eta(0) = 0, \quad \frac{d\xi}{d\bar{s}}(0) = 1, \quad \frac{d\eta}{d\bar{s}}(0) = 0 \quad \dots \quad (3).$$

Die Kurve \mathcal{C} möge sich nun längs C folgenden Voraussetzungen gemäß bewegen:

1. bei Beginn der Bewegung, also zur Zeit $t = 0$, mögen sich die Anfangspunkte $s = 0$ und $\bar{s} = 0$ der beiden Kurven decken;

2. in jedem Zeitpunkt t der Bewegung mögen die beiden Kurven dieselbe Gerade zur Tangente haben;
3. die längs C und \mathfrak{C} gemessenen Bogenlängen, die von dem Anfangspunkt $s = 0$, $\mathfrak{s} = 0$ und dem zur Zeit gemeinsamen Berührungspunkt $s(t)$ und $\mathfrak{s}(t)$ begrenzt werden, mögen ein zeitlich konstantes Verhältnis bilden:

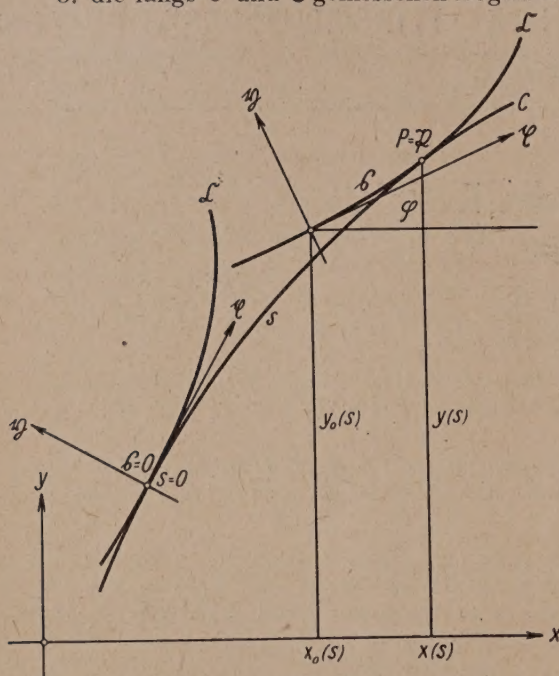


Bild 1

$$\mathfrak{s} = \lambda s \text{ mit konstanter Rollgleitzahl } \lambda.$$

Durch diese Bedingung sei der Vorgang des Rollgleitens definiert. Als Grenzfälle sind im Rollgleiten enthalten:

erstens für $\lambda = 0$ der Fall, daß die Kurve \mathfrak{C} an der Schiene C so entlang gleitet, daß der Anfangspunkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = 0$ von \mathfrak{C} stets Berührungspunkt bleibt; das ist der Fall des reinen Gleitens von \mathfrak{C} auf C ;

zweitens der durch $\lambda = 1$ gekennzeichnete Fall reinen Rollens.

Das Rollgleiten im engeren Sinn ist also durch einen von 0 und 1 verschiedenen Wert der Rollgleitzahl λ gekennzeichnet, die auch negativ oder größer als 1 sein kann. Natürlich wird bei wirklichen Bewegungen die Voraussetzung, daß λ zeitlich konstant sei, nicht oder wenigstens nicht streng erfüllt sei; doch soll hier mit konstantem λ gerechnet werden, um die Verhältnisse nicht allzusehr zu komplizieren.

2. Translationspunkt und Winkelgeschwindigkeit

Zur Bestimmung der raumfesten Polkurve oder Spurkurve dienen die Gleichungen

$$x_m = x_0 - \frac{\dot{y}_0}{\omega}, \quad y_m = y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \quad \dots \quad (4);$$

darin bedeuten x_0, y_0 die Koordinaten des sogenannten Translationspunktes, \dot{x}_0 und \dot{y}_0 seine Geschwindigkeitskomponenten und ω die Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers, der hier im Falle des Rollgleitens mit der Kurve \mathfrak{C} festverbunden zu denken ist oder auch durch sie repräsentiert wird; das körperfeste Koordinatensystem ist also das System $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, dessen \mathfrak{x} -Achse Anfangstangente von \mathfrak{C} ist; sein Anfangspunkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = 0$ werde als Translationspunkt gewählt. Schließlich ist, wenn man den Winkel zwischen den beiden Abszissenachsen $y = 0$ und $\mathfrak{y} = 0$ mit φ bezeichnet, die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Die raumfeste Polkurve der rollgleitenden Kurve \mathfrak{C} läßt sich also berechnen, wenn nur die drei Funktionen $x_0(t)$, $y_0(t)$ und $\omega(t)$ den Bedingungen des Rollgleitens gemäß bestimmt sind.

Ebenso kann dann die körperfeste Polkurve oder Rollkurve nach den bekannten Formeln

$$\left. \begin{aligned} \xi_m &= \frac{1}{\omega} (\dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi) \\ \eta_m &= \frac{1}{\omega} (\dot{x}_0 \cos \varphi + \dot{y}_0 \sin \varphi) \end{aligned} \right\} \dots \quad (5)$$

leicht berechnet werden.

Zur Bestimmung von x_0, y_0 und ω stehen nun folgende Gleichungen zur Verfügung:

erstens fällt der Punkt $\mathfrak{x}(\mathfrak{s})$, $\mathfrak{y}(\mathfrak{s})$ der Kurve \mathfrak{C} gemäß der Rollgleitbedingung

$$\mathfrak{s} = \lambda s \quad \dots \quad (6)$$

mit dem Punkt $x(s)$, $y(s)$ der Kurve C zusammen, so daß die Formeln der Koordinatentransformation gelten:

$$\left. \begin{aligned} x(s) &= x_0 + \mathfrak{x}(\lambda s) \cos \varphi - \mathfrak{y}(\lambda s) \sin \varphi, \\ y(s) &= y_0 + \mathfrak{x}(\lambda s) \sin \varphi + \mathfrak{y}(\lambda s) \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots \quad (7);$$

und zweitens haben die Kurven C und \mathfrak{C} in ihrem gemeinsamen Punkt $P = \mathfrak{P}$ dieselbe Tangentenrichtung, die mit der x -Achse den Winkel ϑ und mit der \mathfrak{x} -Achse den Winkel $\vartheta - \varphi$ einschließt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos \vartheta = \cos(\vartheta - \varphi) \cos \varphi - \sin(\vartheta - \varphi) \sin \varphi = \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{s}} \cos \varphi - \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{s}} \sin \varphi, \\ \frac{dy}{ds} &= \sin \vartheta = \sin(\vartheta - \varphi) \cos \varphi + \cos(\vartheta - \varphi) \sin \varphi = \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{s}} \cos \varphi + \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{s}} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Im folgenden soll nun die Ableitung nach der jeweils maßgebenden Bogenlänge immer durch einen Akzent bezeichnet werden, so daß

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds},$$

aber

$$\mathfrak{x}' = \frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{s}}, \quad \mathfrak{y}' = \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{s}}$$

und infolgedessen — der Punkt bedeute die Ableitung nach der Zeit t —

$$\dot{x} = x'(s) \dot{s}(t), \quad \dot{y} = y'(s) \dot{s}(t)$$

und

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}'(\mathfrak{s}) \lambda \dot{s}(t), \quad \dot{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}'(\mathfrak{s}) \lambda \dot{s}(t)$$

gilt. Mit Rücksicht auf $\mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{y}'^2 = 1$

folgt aus (8)

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= x' \mathfrak{x}' + y' \mathfrak{y}', \\ \sin \varphi &= -x' \mathfrak{y}' + y' \mathfrak{x}' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9),$$

und indem man diese Werte in (7) einsetzt und nach den Koordinaten des Translationspunktes auflöst,

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x(s) - \mathfrak{x}(\lambda s) (x' \mathfrak{x}' + y' \mathfrak{y}') + \mathfrak{y}(\lambda s) (-x' \mathfrak{y}' + y' \mathfrak{x}'), \\ y_0 &= y(s) - \mathfrak{x}(\lambda s) (-x' \mathfrak{y}' + y' \mathfrak{x}') - \mathfrak{y}(\lambda s) (x' \mathfrak{x}' + y' \mathfrak{y}') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10).$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ erhält man aus Formel (9) und den durch Ableitung dieser Gleichungen entstehenden Formeln

$$\begin{aligned} -\sin \varphi \dot{\varphi} &= (x'' \mathfrak{x}' + y'' \mathfrak{y}') \dot{s} + (x' \mathfrak{x}'' + y' \mathfrak{y}'') \lambda \dot{s}, \\ \cos \varphi \dot{\varphi} &= (-x'' \mathfrak{y}' + y'' \mathfrak{x}') \dot{s} + (-x' \mathfrak{y}'' + y' \mathfrak{x}'') \lambda \dot{s}, \end{aligned}$$

und zwar ergibt sich nach einfacher Zwischenrechnung

$$\omega = \dot{\varphi} = \dot{s} (x' y'' - y' x'') - \lambda [\mathfrak{x}' \mathfrak{y}'' - \mathfrak{y}' \mathfrak{x}''] \dots \dots \dots (11).$$

Zu demselben Ergebnis gelangt man fast noch einfacher durch folgende geometrische Betrachtung: φ ist die Differenz der Tangentenwinkel ϑ von C und $\vartheta - \varphi$ von \mathfrak{C} , also $\varphi = \vartheta - (\vartheta - \varphi)$, und daher

$$\omega = \dot{\vartheta} - (\dot{\vartheta} - \dot{\varphi}) = \frac{d\vartheta}{ds} \dot{s} - \frac{d(\vartheta - \varphi)}{d\mathfrak{s}} \lambda \dot{s} = \dot{s} \left(\frac{d\vartheta}{ds} - \lambda \frac{d(\vartheta - \varphi)}{d\mathfrak{s}} \right).$$

Darin ist nun $\frac{d\vartheta}{ds} = x' y'' - y' x'' = K$, die Krümmung der Kurve C , und entsprechend stellt

$$\frac{d(\vartheta - \varphi)}{d\mathfrak{s}} = \mathfrak{x}' \mathfrak{y}'' - \mathfrak{y}' \mathfrak{x}'' = \mathfrak{K}$$

die Krümmung von \mathfrak{C} dar, so daß man wieder (11) oder in anderer Form

$$\omega = \dot{s} (K - \lambda \mathfrak{K}) \dots \dots \dots (12)$$

erhält.

Durch die Formeln (10) und (11) oder (12) sind nun x_0 , y_0 und ω mit Hilfe der Gleichungen der Kurve C und \mathfrak{C} dargestellt.

3. Spurkurve und Rollkurve

Um die beiden Pölkurven des Rollgleitens zu bestimmen, hat man x_0 , y_0 und ω aus (10) und (12) in (4) und (5) einzusetzen. Wenn man bedenkt, daß in diesen beiden Formeln die Ab-

leitungen von x_0 und y_0 nach der Zeit t vorkommen, wird man zunächst auf eine äußerst langwierige Rechnung und ein unübersichtliches Ergebnis gefaßt sein; aber überraschenderweise ist das Endresultat erstaunlich einfach.

Man berechne zunächst

$$\begin{aligned} x_m \omega = x_0 \omega - \dot{y}_0 &= (x - \xi[x'\xi' + y'\eta'] + \eta[-x'\eta' + y'\xi'])\omega \\ &\quad - \dot{s}\{y' - \lambda\xi'(-x'\eta' + y'\xi') - \lambda\eta'(x'\xi' + y'\eta') \\ &\quad - \xi(-x''\eta' + y''\xi' - \lambda x'\eta'' + \lambda y'\xi'') \\ &\quad - \eta(x''\xi' + y''\eta' + \lambda x'\xi'' + \lambda y'\eta'')\} \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} y_m \omega = y_0 \omega + \dot{x}_0 &= (y - \xi[-x'\eta' + y'\xi'] - \eta[x'\xi' + y'\eta'])\omega \\ &\quad + \dot{s}\{x' - \lambda\xi'(x'\xi' + y'\eta') + \lambda\eta'(-x'\eta' + y'\xi') \\ &\quad - \xi(x''\xi' + y''\eta' + \lambda x'\xi'' + \lambda y'\eta'') \\ &\quad + \eta(-x''\eta' + y''\xi' - \lambda x'\eta'' + \lambda y'\xi'')\} \end{aligned}$$

und eliminiere rechter Hand die zweite Ableitung der Koordinaten x, y, ξ, η , mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} x'' &= -y'K, & y'' &= +x'K, \\ \xi'' &= -\eta'\mathfrak{K}, & \eta'' &= +\xi'\mathfrak{K}, \end{aligned}$$

die sofort aus

$$\begin{aligned} x'y'' - y'x'' &= K, & x'x'' + y'y'' &= \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)' = 0 \\ \xi'\eta'' - \eta'\xi'' &= \mathfrak{K}, & \xi'\xi'' + \eta'\eta'' &= \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2)' = 0 \end{aligned}$$

folgen.

Damit ergibt sich mit Rücksicht auf (12)

$$\begin{aligned} x_m \omega &= x\omega - \dot{s}y'(1 - \lambda) + \dot{s}(K - \lambda\mathfrak{K}) \cdot \\ &\quad \{-\xi(x'\xi' + y'\eta') + \eta(-x'\eta' + y'\xi') + \xi(x'\xi' + y'\eta') - \eta(-x'\eta' + y'\xi')\} \\ &= x\omega - \dot{s}y'(1 - \lambda) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y_m \omega &= y\omega + \dot{s}x'(1 - \lambda) + \dot{s}(K - \lambda\mathfrak{K}) \cdot \\ &\quad \{-\xi(-x'\eta' + y'\xi') - \eta(x'\xi' + y'\eta') + \xi(-x'\eta' + y'\xi') + \eta(x'\xi' + y'\eta')\} \\ &= y\omega + \dot{s}x'(1 - \lambda), \end{aligned}$$

schließlich unter der Voraussetzung

$$\omega = \dot{s}(K - \lambda\mathfrak{K}) \neq 0$$

als Parameterdarstellung der raumfesten Polkurve oder Spurkurve

$$\left. \begin{aligned} x_m &= x(s) - \frac{y'(s)(1 - \lambda)}{K - \lambda\mathfrak{K}}, \\ y_m &= y(s) + \frac{x'(s)(1 - \lambda)}{K - \lambda\mathfrak{K}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13);$$

wie man sieht, sind diese überraschend einfachen Formeln den allgemeinen Gleichungen (4) der raumfesten Polkurve sehr ähnlich. Um nun auch die körperfeste Polkurve zu bestimmen, werden \dot{x}_0 und \dot{y}_0 aus (7) berechnet; das ist einfacher, als Formel (10) zu benutzen. Man erhält

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \dot{s}\{x' - \lambda\xi'\cos\varphi + \lambda\eta'\sin\varphi + \xi\sin\varphi\varphi' + \eta\cos\varphi\varphi'\}, \\ \dot{y}_0 &= \dot{s}\{y' - \lambda\xi'\sin\varphi - \lambda\eta'\cos\varphi - \xi\cos\varphi\varphi' + \eta\sin\varphi\varphi'\}, \end{aligned}$$

und indem man diese Werte in (5) einsetzt,

$$\begin{aligned} \xi_m &= \frac{\dot{s}}{\omega}(x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + \lambda\eta' + \xi\varphi'), \\ \eta_m &= \frac{\dot{s}}{\omega}(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi - \lambda\xi' - \eta\varphi'). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf (8) und (12) und $\omega = \dot{\varphi} = \varphi' s$

$$\left. \begin{aligned} \xi_m &= \mathfrak{x}(\bar{s}) - \frac{\mathfrak{y}'(\bar{s})(1-\lambda)}{K-\lambda\mathfrak{R}}, \\ \eta_m &= \mathfrak{y}(\bar{s}) + \frac{\mathfrak{x}'(\bar{s})(1-\lambda)}{K-\lambda\mathfrak{R}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14);$$

das ist die Parameterdarstellung der körperfesten Polkurve oder Rollkurve; sie stimmt mutatis mutandis wörtlich mit der raumfesten der Polkurve überein.

4. Beispiele

Zunächst die Grenzfälle reinen Gleitens ($\lambda = 0$) und reinen Rollens ($\lambda = 1$). Für $\lambda = 0$ liefert (13) als raumfeste Polkurve die Evolute E von C :

$$x_m = x(s) - \frac{y'(s)}{K(s)}, \quad y_m = y(s) + \frac{x'(s)}{K(s)}.$$

Bei der Berechnung der körperfesten Polkurve ist zu beachten, daß das Argument von \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , \mathfrak{x}' , \mathfrak{y}' und \mathfrak{R} die Bogenlänge $\bar{s} = \lambda s$ ist, also hier $\bar{s} = 0$, und daher folgt aus (14) mit Rücksicht auf (3)

$$\xi_m = 0, \quad \eta_m = \frac{1}{K(s)}.$$

Die Rollkurve ist also, da ja s veränderlich ist, ein Stück der Normalen von \mathfrak{C} im Punkt $\bar{s} = 0$. Die Normale von \mathfrak{C} , die ja zugleich immer Normale von C ist, rollt ohne zu gleiten an der Evolute von C ab — dieser aus der Differentialgeometrie bekannte Satz erscheint hier kinematisch gedeutet.

Im Falle des reinen Rollens ($\lambda = 1$) wird nach (13) und (14)

$$\begin{aligned} x_m &= x(s), & y_m &= y(s), \\ \xi_m &= \mathfrak{x}(s), & \eta_m &= \mathfrak{y}(s), \end{aligned}$$

d. h. die raumfeste Polkurve ist mit C identisch und die körperfeste Polkurve mit \mathfrak{C} , was ja von vornherein klar ist.

Die zu dem allgemeinen Fall des Rollgleitens ($\lambda \neq 0$ und 1) gehörige raumfeste Polkurve (13) ist Element einer Kurvenschar, der einerseits die Kurve C und andererseits ihre Evolute E als Grenzkurven angehören; ebenso erscheint die körperfeste Polkurve in eine Kurvenschar (14) eingebettet, der die Kurve \mathfrak{C} und ihre Normale im Anfangspunkt $\bar{s} = 0$ angehören. Dieser irgendwie überraschende Sachverhalt: daß die Kurve C und ihre Evolute als Kurven ein und derselben Schar erscheinen (und ebenso die Kurve \mathfrak{C} und ihre Normale im Anfangspunkt), mag noch an dem Beispiel der Kettenlinie aufgezeigt werden, an der die Tangente rollgleitet.

Hier ist

$$\begin{aligned} C: x &= \mathfrak{R} \sin s, & y &= \sqrt{1+s^2}, & K &= \frac{1}{1+s^2} \\ \mathfrak{C}: \mathfrak{x} &= \bar{s}, & \mathfrak{y} &= 0, & \mathfrak{R} &= 0 \end{aligned}$$

und ergibt sich

$$\begin{aligned} x_m &= \mathfrak{R} \sin s - (1-\lambda)s\sqrt{1+s^2} \\ y_m &= (2-\lambda)\sqrt{1+s^2} \end{aligned}$$

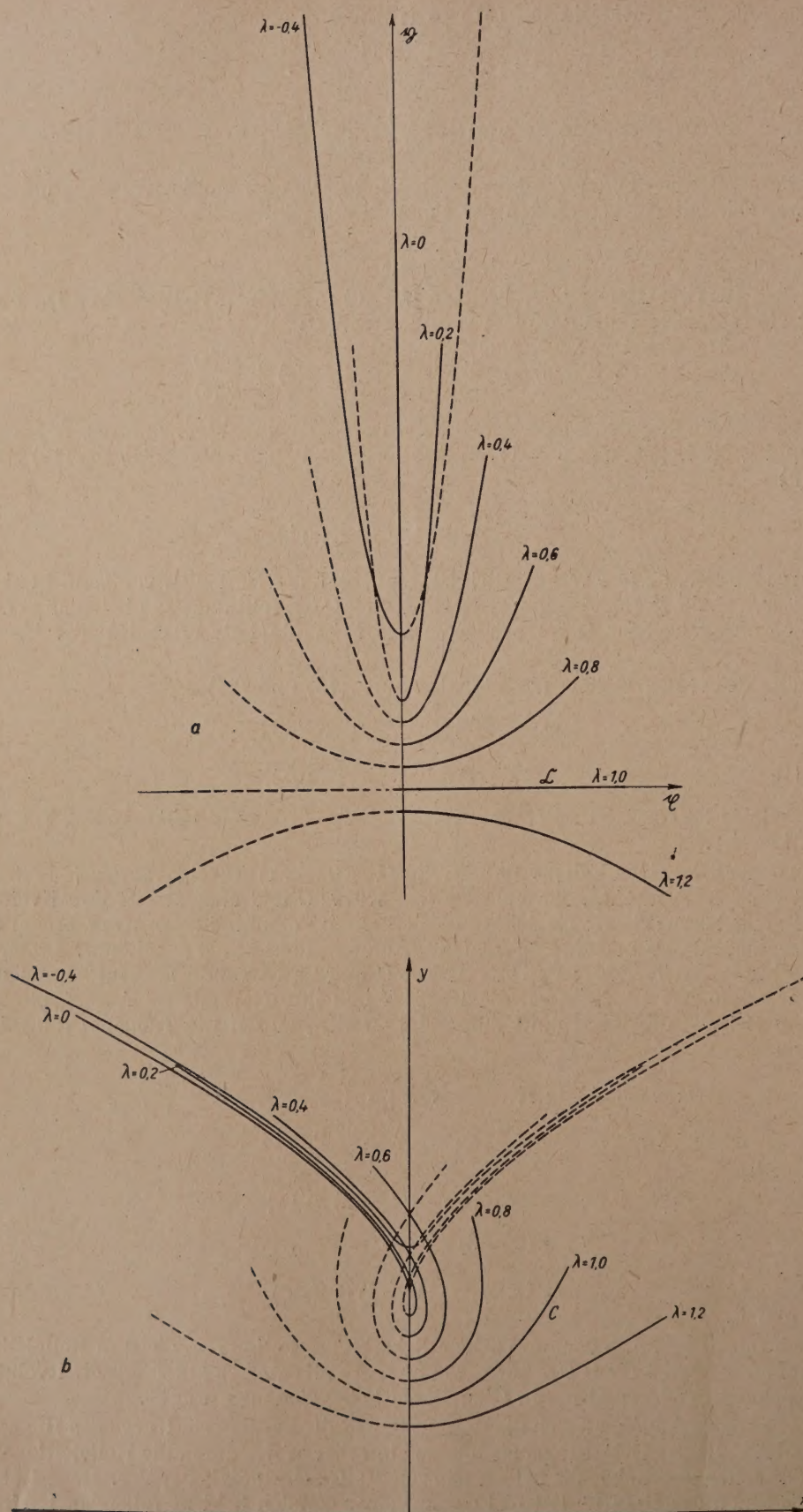
und

$$\xi_m = \lambda s, \quad \eta_m = (1-\lambda)(1+s^2)$$

s. Bild 2a und b.

Endlich zeigt Bild 3a, b noch die beiden Scharen der Polkurven, die zum Rollgleiten eines Kreises \mathfrak{C} auf einem festen Kreis C gehören. In diesem Fall entarten allerdings die Evolute von C und der Abschnitt der Normalen von \mathfrak{C} zu einem koinzidierenden Punkt.

Es liegt nahe zu fragen, ob sich die raumfeste und die körperfeste Kurve des Beschleunigungspoles im Falle des Rollgleitens auch in so einfacher Weise durch die Rollgleitkurve \mathfrak{C} und Schiene C darstellen lassen, wie die beiden Kurven des Geschwindigkeitspoles. Das ist aber nicht der Fall, wie schon das einfache Beispiel des auf einer geraden Schiene rollenden Kreises lehrt. Es zeigt sich nämlich, daß die beiden Kurven des Beschleunigungspoles durch die Kurven \mathfrak{C} und C allein noch nicht bestimmt sind, vielmehr bedarf es dazu noch der Kenntnis des Bewegungs-

Bild 2. Raumfeste (b) und körperfeste (a) Polkurve beim Rollgleiten einer Geraden ζ an der Kettenlinie C

ablaufes. Die bekannten Gleichungen der Beschleunigungspolkurven enthalten im Zähler und Nenner quadratische Formen der Veränderlichen ω^2 und $\dot{\omega}$, und die Koeffizienten dieser beiden Formen sind in der Regel nicht zueinander proportional, so daß zur Bestimmung der Beschleunigungspolkurven die Kenntnis von $\omega(t)$ unerlässlich ist, also der zeitliche Ablauf des Rollgleitens. Darum hat die Berechnung der Beschleunigungspolkurve kaum Interesse.

5. Zusammenfassung

Die bewegliche ebene Kurve \mathcal{C} mag sich längs der raumfesten Kurve oder Schiene C so bewegen, daß die beiden Kurven stets gemeinsame Tangenten besitzen. Ferner sei das Verhältnis der beiden Bogenlängen, die längs der einen und der anderen Kurve zwischen ihren zur Anfangszeit $t=0$ und zu einer beliebigen Zeit t gemeinsamen Berührungspunkten gemessen werden, ein von der Zeit unabhängiger Wert λ . Die durch diese Voraussetzungen gekennzeichnete Bewegung wird als Rollgleiten bezeichnet, der Zahlenwert λ ist das Maß für das im Rollgleiten enthaltene Rollen und Gleiten: $\lambda=0$ bedeutet reines Gleiten, $\lambda=1$ reines Rollen. Die raumfeste und die körperfeste Polkurve dieses Bewegungstypus werden allgemein mit Hilfe der Gleichungen von C und \mathcal{C} dargestellt und in besonderen Fällen diskutiert.

Eingegangen am 28. Mai 1950.

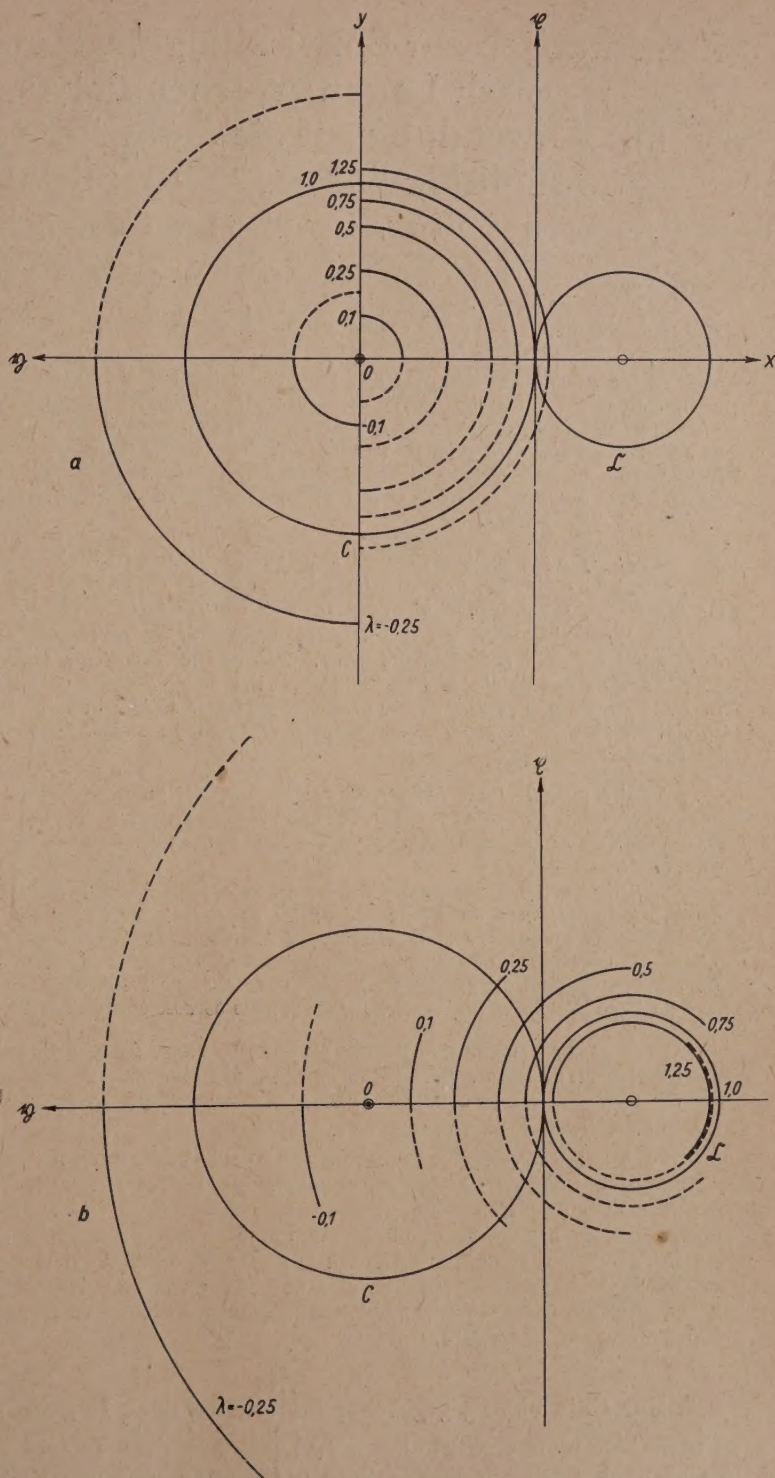


Bild 3. Raumfeste (a) und körperfeste (b) Polkurve beim Rollgleiten eines Kreises \mathcal{C} am Kreis C

Bemerkungen zur Entwicklung gegebener Funktionen nach Legendreschen Polynomen mit Anwendung auf die numerische Integration gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen

Von Erwin Fehlberg in Frankfurt (Main)

Teil I: Zur Berechnung der Koeffizienten, die bei der Entwicklung gegebener Funktionen nach Legendreschen Polynomen auftreten, wird die zu entwickelnde Funktion abschnittsweise durch Parabeln 4ter Ordnung ersetzt und das Produkt dieser Näherungsparabeln mit den entsprechenden Legendreschen Polynomen exakt integriert.

Teil II: Für die gewöhnliche lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung wird die erste Randwertaufgabe numerisch gelöst, indem die Koeffizienten der Differentialgleichung nach Legendreschen Polynomen entwickelt werden und für die Lösung eine nach Legendreschen Polynomen fortschreitende Reihe mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt wird. Die Berechnung der allgemeinen Lösung wird so auf die Auflösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt. Die spezielle Lösung der Randwertaufgabe kann numerisch so angegeben werden, daß darin die rechte Seite der Differentialgleichung sowie die Randwerte noch völlig offen bleiben.

Part I: If a given function shall be expanded in Legendre's polynomials, the author evaluates the coefficients by replacing, in parts, the function by parabolas of the fourth order, and exactly integrating the products of the parabolas of approximation and the corresponding Legendre's polynomials.

Part II: The method is applied to the solution of the first boundary problem of the ordinary linear differential equation of the second order. The coefficients of the differential equation are expanded in Legendre's polynomials, and the solution is written as a series with indeterminate coefficients proceeding in Legendre's polynomials. The general solution is obtained by solving a set of linear equations. The special solution can be given numerically without fixing the right hand side of the differential equation and the boundary values.

Première partie: Pour évaluer les coefficients, qui se présentent en développant une fonction donnée par polynômes de Legendre, cette fonction est remplacée, par sections, par des paraboles du quatrième ordre. Le produit de ces paraboles d'approximation et des polynômes correspondants de Legendre est intégré exactement.

Deuxième partie: Le premier problème des valeurs bordées est résolu numériquement pour une équation différentielle ordinaire du second ordre; les coefficients de l'équation différentielle sont développés par polynômes de Legendre et la solution est écrite sous la forme d'une série en polynômes de Legendre. L'évaluation de la solution générale est tellement réduite sur le problème d'un système d'équations linéaires. La solution spéciale du problème des valeurs bordées peut être donnée numériquement de manière, que le côté droit de l'équation différentielle et les valeurs bordées sont encore libres.

Часть I: Для вычисления коэффициентов, входящих в разложение данной функции, на полиномы Лежандра, данная функция заменяется в отдельных участках параболоми четвертого порядка, а затем произведение этих приближенных парабол на соответственные полиномы Лежандра точно интегрируется.

Часть II: Этот метод применяется при решении первой краевой задачи, относящейся к простым линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Для этого коэффициенты дифференциального уравнения разлагаются на полиномы Лежандра а решение принимается в виде ряда полиномов Лежандра с неизвестными коэффициентами. Таким образом общее решение данной проблемы сводится к решению линейной системы уравнений. Частное решение краевой задачи может быть численно дано в такой форме, в которой правая сторона дифференциального уравнения и краевые значения остаются еще совершенно открытыми.

I. Zur Entwicklung gegebener Funktionen nach Legendreschen Polynomen

Entwickelt man eine Funktion $f(\tau)$, die auf dem Intervall $-1 \leq \tau \leq +1$ z. B. stetig sei, in eine nach Legendreschen Polynomen fortschreitende Reihe:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(\tau) \quad \dots \quad (1).$$

so sind die Koeffizienten a_n der Entwicklung bekanntlich:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} f(\tau) \cdot P_n(\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad \dots \quad (2).$$

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurde ein Verfahren zur numerischen Berechnung der a_n angegeben, das darauf beruhte, daß man das Intervall $-1 \leq \tau \leq +1$ in Teilintervalle der Breite $\Delta\tau=0,1$ einteilt und für je zwei aufeinander folgende Teilintervalle die Funktion $f(\tau)$ durch eine Parabel 2. Ordnung ersetzt, die in den drei Endpunkten $\tau_k, \tau_{k+1}, \tau_{k+2}$ der beiden Teilintervalle mit den dortigen Funktionswerten f_k, f_{k+1}, f_{k+2} übereinstimmt.

Für solche Parabeln an Stelle von $f(\tau)$ läßt sich das Integral in (2) exakt ausführen. Dieses Verfahren zur Berechnung der Koeffizienten erreicht eine relativ hohe Genauigkeit dadurch, daß nur $f(\tau)$ angenähert wird, während die vor allem für großes n stark schwankenden Legendreschen Polynome $P_n(\tau)$ in ihrem genauen Funktionsverlauf erfaßt werden.

Wenn nun die Funktion $f(\tau)$ ihrerseits auf dem Intervall $-1 \leq \tau \leq +1$ stark schwankt, kann es erforderlich werden, den Funktionsverlauf durch Parabeln von höherer als 2. Ordnung anzunähern.

Das in der oben zitierten Arbeit für Parabeln 2. Ordnung angegebene Berechnungsverfahren soll daher im folgenden auf Parabeln 4. Ordnung erweitert werden.

Die an den Stellen $\tau_k, \tau_{k+1/2}, \tau_{k+1}, \tau_{k+3/2}, \tau_{k+2}$ ($\tau_{k+1} - \tau_k = \Delta\tau = 0,1$) mit den dortigen Funktionswerten von $f(\tau)$ übereinstimmende Parabel 4. Ordnung $f_p(\tau)$ hat die Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} f_p(\tau) = & f_k + \frac{\Delta f_k}{\frac{\Delta\tau}{2}} (\tau - \tau_k) + \frac{\Delta^2 f_k}{2! \left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^2} (\tau - \tau_k) (\tau - \tau_{k+1/2}) \\ & + \frac{\Delta^3 f_k}{3! \left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^3} (\tau - \tau_k) (\tau - \tau_{k+1/2}) (\tau - \tau_{k+1}) \\ & + \frac{\Delta^4 f_k}{4! \left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^4} (\tau - \tau_k) (\tau - \tau_{k+1/2}) (\tau - \tau_{k+1}) (\tau - \tau_{k+3/2}) \end{aligned} \right\} \dots (3),$$

wenn: $f(\tau_k) = f_k, f(\tau_{k+1/2}) - f(\tau_k) = \Delta f_k, \Delta f_{k+1/2} - \Delta f_k = \Delta^2 f_k$ usw. gesetzt wird.

Einsetzen von (3) in (2) ergibt:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \sum_k \left\{ & f_k \cdot \int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} P_n(\tau) d\tau + \frac{\Delta f_k}{\frac{\Delta\tau}{2}} \cdot \int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k) P_n(\tau) d\tau \right. \\ & + \frac{\Delta^2 f_k}{2! \left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^2} \cdot \int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k) (\tau - \tau_{k+1/2}) P_n(\tau) d\tau \\ & + \frac{\Delta^3 f_k}{3! \left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^3} \cdot \int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k) (\tau - \tau_{k+1/2}) (\tau - \tau_{k+1}) P_n(\tau) d\tau \\ & \left. + \frac{\Delta^4 f_k}{4! \left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^4} \cdot \int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k) (\tau - \tau_{k+1/2}) (\tau - \tau_{k+1}) (\tau - \tau_{k+3/2}) P_n(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man abkürzend:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} P_n(\tau) d\tau &= J_n(\tau_k, \tau_{k+2}) = (-1)^n \cdot \int_{\tau_{-(k+2)}}^{\tau_{-k}} P_n(\tau) d\tau, \\ \int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k) P_n(\tau) d\tau &= K_n(\tau_k, \tau_{k+2}) = (-1)^{n+1} \cdot \int_{\tau_{-(k+2)}}^{\tau_{-k}} (\tau - \tau_k) P_n(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

¹⁾ Z. angew. Math. Mech. 24 (1944), S. 71–76: „Eine Bemerkung zur numerischen Differentiation durch Approximation, ausgeführt am Beispiel der Kugelfunktionen als Approximationsfunktionen.“

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k) (\tau - \tau_{k+1/2}) P_n(\tau) d\tau = L_n(\tau_k, \tau_{k+2}) = (-1)^n \cdot \int_{\tau_{-(k+2)}}^{\tau_{-k}} (\tau - \tau_{-k}) (\tau - \tau_{-(k+1/2)}) P_n(\tau) d\tau,$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k) (\tau - \tau_{k+1/2}) (\tau - \tau_{k+1}) P_n(\tau) d\tau = M_n(\tau_k, \tau_{k+2})$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \int_{\tau_{-(k+2)}}^{\tau_{-k}} (\tau - \tau_{-k}) (\tau - \tau_{-(k+1/2)}) (\tau - \tau_{-(k+1)}) P_n(\tau) d\tau$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k) (\tau - \tau_{k+1/2}) (\tau - \tau_{k+1}) (\tau - \tau_{k+3/2}) P_n(\tau) d\tau = N_n(\tau_k, \tau_{k+2}).$$

$$= (-1)^n \cdot \int_{\tau_{-(k+2)}}^{\tau_{-k}} (\tau - \tau_{-k}) (\tau - \tau_{-(k+1/2)}) (\tau - \tau_{-(k+1)}) (\tau - \tau_{-(k+3/2)}) P_n(\tau) d\tau,$$

so findet man wegen: $P_n(\tau) = \frac{1}{2n+1} \cdot [P'_{n+1}(\tau) - P'_{n-1}(\tau)]$

$$\left. \begin{aligned} (2n+1) \cdot J_n(\tau_k, \tau_{k+2}) &= [P_{n+1}(\tau_{k+2}) - P_{n-1}(\tau_{k+2})] - [P_{n+1}(\tau_k) - P_{n-1}(\tau_k)], \\ (2n+1) \cdot K_n(\tau_k, \tau_{k+2}) &= 2 \cdot \Delta\tau \cdot [P_{n+1}(\tau_{k+2}) - P_{n-1}(\tau_{k+2})] \\ &\quad - [J_{n+1}(\tau_k, \tau_{k+2}) - J_{n-1}(\tau_k, \tau_{k+2})], \\ (2n+1) \cdot L_n(\tau_k, \tau_{k+2}) &= 3(\Delta\tau)^2 \cdot [P_{n+1}(\tau_{k+2}) - P_{n-1}(\tau_{k+2})] \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \Delta\tau \cdot [J_{n+1}(\tau_k, \tau_{k+2}) - J_{n-1}(\tau_k, \tau_{k+2})] - 2 \cdot [K_{n+1}(\tau_k, \tau_{k+2}) \\ &\quad - K_{n-1}(\tau_k, \tau_{k+2})] \\ (2n+1) \cdot M_n(\tau_k, \tau_{k+2}) &= 3 \cdot (\Delta\tau)^3 \cdot [P_{n+1}(\tau_{k+2}) - P_{n-1}(\tau_{k+2})] \\ &\quad - \frac{1}{2} (\Delta\tau)^2 \cdot [J_{n+1}(\tau_k, \tau_{k+2}) - J_{n-1}(\tau_k, \tau_{k+2})] + \frac{3}{2} \cdot \Delta\tau \cdot [K_{n+1}(\tau_k, \tau_{k+2}) \\ &\quad - K_{n-1}(\tau_k, \tau_{k+2})] - 3 \cdot [L_{n+1}(\tau_k, \tau_{k+2}) - L_{n-1}(\tau_k, \tau_{k+2})], \\ (2n+1) \cdot N_n(\tau_k, \tau_{k+2}) &= \frac{3}{2} \cdot (\Delta\tau)^4 \cdot [P_{n+1}(\tau_{k+2}) - P_{n-1}(\tau_{k+2})] \\ &\quad + \frac{3}{4} (\Delta\tau)^3 \cdot [J_{n+1}(\tau_k, \tau_{k+2}) - J_{n-1}(\tau_k, \tau_{k+2})] - 2 \cdot (\Delta\tau)^2 \cdot [K_{n+1}(\tau_k, \tau_{k+2}) \\ &\quad - K_{n-1}(\tau_k, \tau_{k+2})] + 3 \cdot \Delta\tau \cdot [L_{n+1}(\tau_k, \tau_{k+2}) - L_{n-1}(\tau_k, \tau_{k+2})] \\ &\quad - 4 \cdot [M_{n+1}(\tau_k, \tau_{k+2}) - M_{n-1}(\tau_k, \tau_{k+2})] \end{aligned} \right\} (4).$$

Die Zahlenwerte dieser Funktionen sind in den Tabellen 1 bis 5 zusammengestellt. Die Tabellen 1 und 2 stimmen mit den entsprechenden Tabellen der oben zitierten Arbeit überein und sind hier nur der Vollständigkeit halber nochmals aufgeführt. [Die Funktion $L_n(\tau_k, \tau_{k+2})$ hat jetzt eine etwas andere Bedeutung als die Funktion $L_{k, k+1, n}(\tau_k, \tau_{k+2})$ der oben zitierten Arbeit; sie würde der Funktion $L_{k, k+1/2, n}(\tau_k, \tau_{k+2})$ entsprechen].

Tabelle 1
(2n+1) J_n(τ_k, τ_{k+2}) = (-1)ⁿ · (2n+1) · J_n(τ_{-(k+2)}, τ_{-k})

$\begin{matrix} (\tau_k, \tau_{k+2}) \\ n \end{matrix}$	(0, 0, 2)	(0, 2; 0, 4)	(0, 4; 0, 6)	(0, 6; 0, 8)	(0, 8; 1)
0	+0,200 000 000	+0,200 000 000	+0,200 000 000	+0,200 000 000	+0,200 000 000
1	+0,060 000 000	+0,180 000 000	+0,300 000 000	+0,420 000 000	+0,540 000 000
2	-0,480 000 000	-0,360 000 000	-0,120 000 000	+0,240 000 000	+0,720 000 000
3	-0,203 000 000	-0,525 000 000	-0,595 000 000	-0,245 000 000	+0,693 000 000
4	+0,587 520 000	+0,123 120 000	-0,503 280 000	-0,686 880 000	+0,479 520 000
5	+0,374 924 000	+0,718 212 000	+0,174 460 000	-0,738 892 000	+0,158 796 000
6	-0,601 036 800	+0,315 806 400	+0,760 468 800	-0,315 369 600	-0,159 868 800
7	-0,544 926 300	-0,600 646 500	+0,599 878 500	+0,334 897 500	-0,375 140 700
8	+0,539 473 920	-0,713 647 080	-0,194 528 280	+0,796 207 920	-0,427 506 480
9	+0,688 168 076	+0,195 201 538	-0,819 840 310	+0,773 187 042	-0,317 185 096
10	-0,420 272 456	+0,854 589 083	-0,625 406 332	+0,291 447 859	-0,100 358 154
11	-0,785 888 617	+0,316 858 074	+0,191 599 461	-0,328 336 783	+0,134 088 177
12	+0,264 015 299	-0,659 703 344	+0,794 811 624	-0,697 316 154	+0,298 192 575

Tabelle 2
 $(2n+1)K_n(\tau_k, \tau_{k+2}) = (-1)^{n+1} \cdot (2n+1) \cdot K_n(\tau_{-(k+2)}, \tau_{-k})$

(τ_k, τ_{k+2}) n	(0; 0,2)	(0,2; 0,4)	(0,4; 0,6)	(0,6; 0,8)	(0,8; 1)
0	+0,020 000 000	+0,020 000 000	+0,020 000 000	+0,020 000 000	+0,020 000 000
1	+0,008 000 000	+0,020 000 000	+0,032 000 000	+0,044 000 000	+0,056 000 000
2	-0,047 000 000	-0,033 000 000	-0,007 000 000	+0,031 000 000	+0,081 000 000
3	-0,026 880 000	-0,056 280 000	-0,057 680 000	-0,014 280 000	+0,090 720 000
4	+0,054 420 000	+0,001 836 000	-0,059 388 000	-0,063 732 000	+0,084 564 000
5	+0,048 998 400	+0,070 514 400	+0,001 601 600	-0,083 820 000	+0,065 577 600
6	-0,049 794 940	+0,048 289 020	+0,070 915 780	-0,057 524 740	+0,039 445 380
7	-0,069 765 120	-0,045 655 020	+0,077 989 080	+0,003 933 180	+0,012 849 840
8	+0,035 346 992	-0,085 151 497	+0,009 401 102	+0,067 133 741	-0,008 315 428
9	+0,085 474 099	-0,009 906 285	-0,072 861 975	+0,096 394 310	-0,020 368 480
10	-0,013 666 049	+0,083 360 652	-0,089 697 842	+0,075 041 198	-0,022 523 873
11	-0,093 415 372	+0,067 612 681	-0,022 723 998	+0,014 953 480	-0,016 706 663
12	-0,011 984 784	-0,039 459 807	+0,066 289 781	-0,050 985 629	-0,006 629 003

Für die Koeffizienten a_n ergibt sich dann:

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \sum_k^{(0,1)} \left\{ [f_k + (-1)^n \cdot f_{-k}] (2n+1) \cdot J_n(\tau_k, \tau_{k+2}) \right. \\ \left. + \frac{2}{|\Delta\tau|} \cdot [\Delta f_k + (-1)^n \cdot \Delta f_{-k}] \cdot (2n+1) \cdot K_n(\tau_k, \tau_{k+2}) \right. \\ \left. + \frac{2}{(\Delta\tau)^2} \cdot [\Delta^2 f_k + (-1)^n \cdot \Delta^2 f_{-k}] \cdot (2n+1) \cdot L_n(\tau_k, \tau_{k+2}) \right. \\ \left. + \frac{4}{3|\Delta\tau|^3} \cdot [\Delta^3 f_k + (-1)^n \cdot \Delta^3 f_{-k}] \cdot (2n+1) \cdot M_n(\tau_k, \tau_{k+2}) \right. \\ \left. + \frac{2}{3(\Delta\tau)^4} \cdot [\Delta^4 f_k + (-1)^n \cdot \Delta^4 f_{-k}] \cdot (2n+1) \cdot N_n(\tau_k, \tau_{k+2}) \right\} \quad (5).$$

Hierbei bedeutet f_{-k} den Funktionswert an der negativen Stelle τ_{-k} , $\Delta f_{-k} = f_{-(k+1)} - f_{-k}$, $\Delta^2 f_{-k} = \Delta f_{-(k+1)} - \Delta f_{-k}$, usw.

Bei Benutzung der Tabellen 1 bis 5 kann die Berechnung der Koeffizienten a_n bequem mit der Rechenmaschine durchgeführt werden.

Das folgende Zahlenbeispiel zeigt die durch die Benutzung von Parabeln 4. Ordnung erzielte Erhöhung der Genauigkeit der Koeffizienten a_n .

Beispiel: $f(\tau) = P_6(\tau)$ für $-1 \leq \tau \leq +1$ und $\Delta\tau = 0,1$.

	a_0	a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}
Parabeln 2. Ordnung . .	+0,00069	+0,00789	+0,02219	+1,02402	+0,01309	-0,01251	-0,04044
„ 4. „	0,00000	+0,00001	+0,00002	+1,00003	+0,00002	+0,00001	0,00000
Exakte Werte	0	0	0	1	0	0	0

Tabelle 3
 $(2n+1)L_n(\tau_k, \tau_{k+2}) = (-1)^n \cdot (2n+1) \cdot L_n(\tau_{-(k+2)}, \tau_{-k})$

(τ_k, τ_{k+2}) n	(0; 0,2)	(0,2; 0,4)	(0,4; 0,6)	(0,6; 0,8)	(0,8; 1)
0	+0,001 666 667	+0,001 666 667	+0,001 666 667	+0,001 666 667	+0,001 666 667
1	+0,000 800 000	+0,001 800 000	+0,002 800 000	+0,003 800 000	+0,004 800 000
2	-0,003 836 667	-0,002 536 667	-0,000 236 667	+0,003 063 333	+0,007 363 333
3	-0,002 669 333	-0,004 914 000	-0,004 638 667	-0,000 443 333	+0,009 072 000
4	+0,004 191 000	-0,000 567 000	-0,005 507 400	-0,004 834 200	+0,009 768 600
5	+0,004 801 133	+0,005 678 640	-0,000 983 693	-0,007 473 547	+0,009 444 600
6	-0,003 340 909	+0,005 084 469	+0,005 356 403	-0,006 493 435	+0,008 237 619
7	-0,006 690 526	-0,002 653 758	+0,007 514 382	-0,001 939 078	+0,006 404 314
8	+0,001 512 318	-0,007 753 921	+0,002 850 113	+0,004 121 227	+0,004 273 134
9	+0,007 931 766	-0,002 908 084	-0,004 948 316	+0,008 618 995	+0,002 185 269
10	+0,000 992 754	+0,006 282 503	-0,008 852 378	+0,009 108 734	+0,000 434 896
11	-0,008 240 335	+0,007 821 226	-0,004 939 690	+0,005 114 430	-0,000 779 477
12	-0,003 786 691	-0,000 892 939	+0,003 693 006	-0,001 542 040	-0,001 382 712

Tabelle 4.
 $(2n+1)M_n(\tau_k, \tau_{k+2}) = (-1)^{n+1} \cdot M_n(\tau_{-(k+2)}, \tau_{-k})$

$\begin{matrix} (\tau_k, \tau_{k+2}) \\ n \end{matrix}$	(0; 0,2)	(0,2; 0,4)	(0,4; 0,6)	(0,6; 0,8)	(0,8; 1)
0	+0,000 100 000	+0,000 100 000	+0,000 100 000	+0,000 100 000	+0,000 100 000
1	+0,000 052 000	+0,000 112 000	+0,000 172 000	+0,000 232 000	+0,000 292 000
2	-0,000 227 000	-0,000 145 000	-0,000 003 000	+0,000 199 000	+0,000 461 000
3	-0,000 172 400	-0,000 299 800	-0,000 270 400	-0,000 000 200	+0,000 594 800
4	+0,000 237 900	-0,000 056 700	-0,000 344 100	-0,000 266 460	+0,000 685 260
5	+0,000 306 262	+0,000 328 086	-0,000 095 634	-0,000 451 154	+0,000 728 838
6	-0,000 169 354	+0,000 332 746	+0,000 291 950	-0,000 435 979	+0,000 726 422
7	-0,000 418 220	-0,000 114 386	+0,000 468 256	-0,000 199 709	+0,000 682 645
8	+0,000 037 640	-0,000 467 741	+0,000 238 675	+0,000 163 648	+0,000 604 941
9	+0,000 480 202	-0,000 240 924	-0,000 232 377	+0,000 486 021	+0,000 502 599
10	+0,000 134 309	+0,000 325 265	-0,000 540 648	+0,000 606 232	+0,000 385 941
11	-0,000 473 564	+0,000 515 829	-0,000 394 471	+0,000 450 961	+0,000 265 631
12	-0,000 317 274	+0,000 051 088	+0,000 110 773	+0,000 075 514	+0,000 151 998

Tabelle 5.
 $(2n+1)N_n(\tau_k, \tau_{k+2}) = (-1)^n \cdot N_n(\tau_{-(k+2)}, \tau_{-k})$

$\begin{matrix} (\tau_k, \tau_{k+2}) \\ n \end{matrix}$	(0; 0,2)	(0,2; 0,4)	(0,4; 0,6)	(0,6; 0,8)	(0,8; 1)
0	+0,000 002 333	+0,000 002 333	+0,000 002 333	+0,000 002 333	+0,000 002 333
1	+0,000 001 400	+0,000 002 800	+0,000 004 200	+0,000 005 600	+0,000 007 000
2	-0,000 005 169	-0,000 003 069	+0,000 000 431	+0,000 005 331	+0,000 011 631
3	-0,000 004 607	-0,000 007 270	-0,000 006 013	+0,000 001 123	+0,000 016 100
4	+0,000 005 011	-0,000 002 339	-0,000 008 729	-0,000 005 339	+0,000 020 179
5	+0,000 008 063	+0,000 007 245	-0,000 003 822	-0,000 010 889	+0,000 023 576
6	-0,000 002 714	+0,000 009 115	+0,000 005 782	-0,000 012 298	+0,000 026 014
7	-0,000 010 744	-0,000 000 908	+0,000 011 981	-0,000 007 965	+0,000 027 315
8	-0,000 001 232	-0,000 011 418	+0,000 008 392	+0,000 000 973	+0,000 027 457
9	+0,000 011 853	-0,000 008 416	-0,000 003 287	+0,000 010 803	+0,000 026 576
10	+0,000 006 104	+0,000 006 056	-0,000 013 608	+0,000 016 804	+0,000 024 922
11	-0,000 010 904	+0,000 014 359	-0,000 013 066	+0,000 015 576	+0,000 022 769
12	-0,000 010 992	+0,000 004 842	-0,000 000 885	+0,000 006 948	+0,000 020 327

Die in der oben zitierten Arbeit angestellte Fehlerbetrachtung läßt sich in ähnlicher Weise auf die Approximation von $f(\tau)$ durch Parabeln 4. Ordnung übertragen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß das hier entwickelte Verfahren zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten a_n nicht auf eine Entwicklung nach Legendreschen Polynomen beschränkt ist, sondern in gleicher Weise für die Entwicklung nach Funktionen eines beliebigen Orthogonalsystems anwendbar ist.

II. Anwendung auf die numerische Integration gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x)y = c(x) \quad \dots \quad (1),$$

in der $a(x)$, $b(x)$ und $c(x)$ stetige Funktionen von x seien²⁾ ³⁾.

Für die Differentialgleichung (1) sei die erste Randwertaufgabe:

$$x = -1, \quad y = y(-1), \quad x = +1, \quad y = y(+1) \quad \dots \quad (2)$$

gestellt³⁾.

Gesucht sei die Lösung von (1) und (2) auf dem Intervall $-1 \leq x \leq +1$.

²⁾ Auf die Beseitigung des Gliedes mit y' sei hier verzichtet, da diese zur Folge hätte, daß die sich dann ergebende Differentialgleichung $y'' + \tilde{b}(x) \cdot y = \tilde{c}(x)$ in $\tilde{b}(x)$ den Differentialquotienten $a'(x)$ enthalten würde, d. h. $\tilde{b}(x)$ bei evtl. nur in Kurvenform vorgegebenen Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ nur auf dem Wege über eine Differentiation gebildet werden könnte.

³⁾ Es sei darauf hingewiesen, daß die folgenden Ausführungen sich in völlig analoger Weise auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen von höherer als zweiter Ordnung sowie auf andere Rand- oder Anfangswertaufgaben übertragen.

Die Funktionen $a(x)$, $b(x)$ und $c(x)$ entwickle man auf diesem Intervall nach Legendreschen Polynomen:

$$a(x) = \sum_n A_n \cdot P_n(x), \quad b(x) = \sum_n B_n \cdot P_n(x), \quad c(x) = \sum_n C_n \cdot P_n(x) \quad (3).$$

Für die gesuchte Lösung mache man ebenfalls einen nach Legendreschen Polynomen fortschreitenden Ansatz:

$$y(x) = \sum_n Y_n \cdot P_n(x) \quad (4).$$

Mit (3) und (4) gehe man in (1) ein. In den Entwicklungen (3) und (4) möge n von 0 bis 7 laufen, da dies im allgemeinen zu einer genügend genauen Lösung von (1) führt. Außer Gliedern mit $P_n(x)$ treten dann in (1) Glieder mit $P_m(x) \cdot P_n(x)$, $P_m(x) \cdot P'_n(x)$ und $P''_n(x)$ auf, die man sämtlich wieder nach $P_n(x)$ entwickeln kann:

a) $P_m(x) \cdot P_n(x)$: Aus der Rekursionsformel

$$P_m(x) = \frac{2m-1}{m} P_1(x) P_{m-1}(x) - \frac{m-1}{m} \cdot P_{m-2}(x)$$

der Legendreschen Polynome gewinnt man:

$$\left. \begin{aligned} P_m(x) \cdot P_n(x) &= \frac{2m-1}{m} \cdot \frac{n+1}{2n+1} \cdot P_{m-1}(x) \cdot P_{n+1}(x) \\ &+ \frac{2m-1}{m} \cdot \frac{n}{2n+1} \cdot P_{m-1}(x) P_{n-1}(x) - \frac{m-1}{m} \cdot P_{m-2}(x) \cdot P_n(x) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

als eine für unsere Zwecke geeignete Rekursionsformel.

Mit $P_0 P_n = P_n$ und $P_1 P_n = \frac{n}{2n+1} \cdot P_{n-1} + \frac{n+1}{2n+1} \cdot P_{n+1}$ lassen sich für $m \geq 2$ alle Produkte $P_m \cdot P_n$ nach (5) rekursiv durch die Legendresche Polynome ausdrücken.

b) $P_m(x) P'_n(x)$: Aus $P'_n(x) = (2n-1) P_{n-1}(x) + (2n-5) P_{n-3}(x) + (2n-9) P_{n-5}(x) + (2n-13) P_{n-7}(x)$ ⁴⁾ ($n \leq 7$) folgt:

$$\left. \begin{aligned} P_m(x) P'_n(x) &= (2n-1) P_m(x) P_{n-1}(x) + (2n-5) P_m(x) P_{n-3}(x) \\ &+ (2n-9) P_m(x) P_{n-5}(x) + (2n-13) P_m(x) P_{n-7}(x) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

als eine für $n \leq 7$ in Verbindung mit (5) geeignete Rekursionsformel.

c) $P''_n(x)$: $P''_n(x) = (2n-1)(2n-3) P_{n-2}(x) + 2 \cdot (2n-3)(2n-7) P_{n-4}(x) + 3(2n-5)(2n-11) P_{n-6}(x)$ ⁴⁾ ($n \leq 7$) $\left. \right\} \quad (7).$

Nach Eingang mit den Ansätzen (3) und (4) in die Differentialgleichung (1) und Einführung der Entwicklungen (5), (6) und (7) kann man zu einem linearen Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten Y_n der Lösung gelangen, indem man einen Koeffizientenvergleich für die einzelnen Legendreschen Polynome durchführt.

Der Koeffizientenvergleich für $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ und $P_5(x)$ ergibt ein Gleichungssystem, das sich in Matrizenform⁵⁾ folgendermaßen schreibt:

$$\mathfrak{D} \cdot \eta = \mathfrak{c} \quad (8)$$

mit:

$$\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_5 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & \cdots & d_{07} \\ d_{10} & d_{11} & \cdots & d_{17} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{50} & d_{51} & \cdots & d_{57} \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix \mathfrak{D} läßt sich additiv zusammensetzen aus drei Matrizen:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{Z} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \quad (9),$$

von denen $\mathfrak{Z} = (\cdots \zeta_{mn} \cdots)$ nur aus festen Zahlwerten besteht, während $\mathfrak{A} = (\cdots \alpha_{mn} \cdots)$ und $\mathfrak{B} = (\cdots \beta_{mn} \cdots)$ von den Entwicklungskoeffizienten der Funktion $a(x)$ bzw. $b(x)$ abhängen.

⁴⁾ Glieder mit $P_\nu(x)$, in denen ν negativ ist, sind wegzulassen.

⁵⁾ Die Verwendung der Matrizen Schreibweise zur textlichen Kürzung geht auf einen mir von Herrn R. Zurmühl in Darmstadt gemachten Vorschlag zurück, dem ich für seine Anregung Dank schulde.

Die Elemente von \mathfrak{B} sind Null bis auf die folgenden:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{m, m+2} &= (2m+3)(2m+1); & \zeta_{m, m+4} &= 2(2m+5)(2m+1); \\ \zeta_{m, m+6} &= 3(2m+7)(2m+1) \end{aligned} \right\} \dots (10).$$

Zur Berechnung der beiden anderen Matrizen führt man die folgenden Abkürzungen ein:

$$L_0(A_m) = A_m,$$

$$L_1(A_m) = \frac{m+1}{2m+3} \cdot A_{m+1} + \frac{m}{2m-1} \cdot A_{m-1},$$

$$L_2(A_m) = \frac{3}{2} \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot A_{m+2} + \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot A_m + \frac{3}{2} \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot A_{m-2},$$

$$L_3(A_m) = \frac{5}{2} \cdot \frac{m+3}{2m+7} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot A_{m+3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot A_{m+1} \\ + \frac{3}{2} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot A_{m-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot \frac{m-2}{2m-5} \cdot A_{m-3},$$

$$L_4(A_m) = \frac{35}{8} \cdot \frac{m+4}{2m+9} \cdot \frac{m+3}{2m+7} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot A_{m+4} \\ + \frac{5}{2} \cdot \frac{m+3}{2m+7} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot A_{m+2} \\ + \frac{9}{4} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot A_m \\ + \frac{5}{2} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot \frac{m-2}{2m-5} \cdot A_{m-2} \\ + \frac{35}{8} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot \frac{m-2}{2m-5} \cdot \frac{m-3}{2m-7} \cdot A_{m-4},$$

$$L_5(A_m) = \frac{63}{8} \cdot \frac{m+5}{2m+11} \cdot \frac{m+4}{2m+9} \cdot \frac{m+3}{2m+7} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot A_{m+5} \\ + \frac{35}{8} \cdot \frac{m+4}{2m+9} \cdot \frac{m+3}{2m+7} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot A_{m+3} \\ + \frac{15}{4} \cdot \frac{m+3}{2m+7} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot A_{m+1} \\ + \frac{15}{4} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot \frac{m-2}{2m-5} \cdot A_{m-1} \\ + \frac{35}{8} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot \frac{m-2}{2m-5} \cdot \frac{m-3}{2m-7} \cdot A_{m-3} \\ + \frac{63}{8} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot \frac{m-2}{2m-5} \cdot \frac{m-3}{2m-7} \cdot \frac{m-4}{2m-9} \cdot A_{m-5}.$$

$$L_6(A_m) = \frac{231}{16} \cdot \frac{m+6}{2m+13} \cdot \frac{m+5}{2m+11} \cdot \frac{m+4}{2m+9} \cdot \frac{m+3}{2m+7} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot A_{m+6} \\ + \frac{63}{8} \cdot \frac{m+5}{2m+11} \cdot \frac{m+4}{2m+9} \cdot \frac{m+3}{2m+7} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot A_{m+4} \\ + \frac{105}{16} \cdot \frac{m+4}{2m+9} \cdot \frac{m+3}{2m+7} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot A_{m+2} \\ + \frac{25}{4} \cdot \frac{m+3}{2m+7} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot \frac{m-2}{2m-5} \cdot A_m \\ + \frac{105}{16} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot \frac{m-2}{2m-5} \cdot \frac{m-3}{2m-7} \cdot A_{m-2} \\ + \frac{63}{8} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot \frac{m-2}{2m-5} \cdot \frac{m-3}{2m-7} \cdot \frac{m-4}{2m-9} \cdot A_{m-4} \\ + \frac{231}{16} \cdot \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{m-1}{2m-3} \cdot \frac{m-2}{2m-5} \cdot \frac{m-3}{2m-7} \cdot \frac{m-4}{2m-9} \cdot \frac{m-5}{2m-11} \cdot A_{m-6}.$$

$$\begin{aligned}
 L_7(A_m) = & \frac{429}{16} \cdot \frac{m+7}{2m+15} \frac{m+6}{2m+13} \frac{m+5}{2m+11} \frac{m+4}{2m+9} \frac{m+3}{2m+7} \frac{m+2}{2m+5} \frac{m+1}{2m+3} \cdot A_{m+7} \\
 & + \frac{231}{16} \cdot \frac{m+6}{2m+13} \frac{m+5}{2m+11} \frac{m+4}{2m+9} \frac{m+3}{2m+7} \frac{m+2}{2m+5} \frac{m+1}{2m+3} \frac{m}{2m+1} \cdot A_{m+5} \\
 & + \frac{189}{16} \cdot \frac{m+5}{2m+11} \frac{m+4}{2m+9} \frac{m+3}{2m+7} \frac{m+2}{2m+5} \frac{m+1}{2m+3} \frac{m}{2m+1} \frac{m-1}{2m-3} \cdot A_{m+3} \\
 & + \frac{175}{16} \cdot \frac{m+4}{2m+9} \frac{m+3}{2m+7} \frac{m+2}{2m+5} \frac{m+1}{2m+3} \frac{m}{2m+1} \frac{m-1}{2m-3} \frac{m-2}{2m-5} \cdot A_{m+1} \\
 & + \frac{175}{16} \cdot \frac{m+3}{2m+7} \frac{m+2}{2m+5} \frac{m+1}{2m+3} \frac{m}{2m+1} \frac{m-1}{2m-3} \frac{m-2}{2m-5} \frac{m-3}{2m-7} \cdot A_{m-1} \\
 & + \frac{189}{16} \cdot \frac{m+2}{2m+5} \frac{m+1}{2m+3} \frac{m}{2m+1} \frac{m-1}{2m-3} \frac{m-2}{2m-5} \frac{m-3}{2m-7} \frac{m-4}{2m-9} \cdot A_{m-3} \\
 & + \frac{231}{16} \cdot \frac{m+1}{2m+3} \frac{m}{2m+1} \frac{m-1}{2m-3} \frac{m-2}{2m-5} \frac{m-3}{2m-7} \frac{m-4}{2m-9} \frac{m-5}{2m-11} \cdot A_{m-5} \\
 & + \frac{429}{16} \cdot \frac{m}{2m+1} \frac{m-1}{2m-3} \frac{m-2}{2m-5} \frac{m-3}{2m-7} \frac{m-4}{2m-9} \frac{m-5}{2m-11} \frac{m-6}{2m-13} \cdot A_{m-7}.
 \end{aligned}$$

Dann wird, wenn man die entsprechenden Abkürzungen in den B_m -Werten mit $L_\nu(B_m)$ bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{m0} &= 0 & \beta_{m0} &= L_0(B_m) \\
 \alpha_{m1} &= L_0(A_m) & \beta_{m1} &= L_1(B_m) \\
 \alpha_{m2} &= 3 L_1(A_m) & \beta_{m2} &= L_2(B_m) \\
 \alpha_{m3} &= L_0(A_m) + 5 L_2(A_m) & \beta_{m3} &= L_3(B_m) \\
 \alpha_{m4} &= 3 L_1(A_m) + 7 L_3(A_m) & \beta_{m4} &= L_4(B_m) \\
 \alpha_{m5} &= L_0(A_m) + 5 L_2(A_m) + 9 L_4(A_m) & \beta_{m5} &= L_5(B_m) \\
 \alpha_{m6} &= 3 L_1(A_m) + 7 L_3(A_m) + 11 L_5(A_m) & \beta_{m6} &= L_6(B_m) \\
 \alpha_{m7} &= L_0(A_m) + 5 L_2(A_m) + 9 L_4(A_m) + 13 L_6(A_m) & \beta_{m7} &= L_7(B_m)
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Durch (9), (10) und (11) ist dann die Matrix \mathfrak{D} in (8) bestimmt.

Zerlegt man die Matrix \mathfrak{D} in die beiden Teilmatrizen:

$$\mathfrak{D}_1 = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} \\ d_{10} & d_{11} \\ \vdots & \vdots \\ d_{50} & d_{51} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_2 = \begin{pmatrix} d_{02} & d_{03} & \cdots & d_{07} \\ d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{17} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{52} & d_{53} & \cdots & d_{75} \end{pmatrix}$$

und den Vektor η in:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_7 \end{pmatrix}$$

so wird aus (8):

$$\mathfrak{D}_2 \eta_2 = c - \mathfrak{D}_1 \eta_1 \quad \dots \quad (12).$$

Auflösung nach η_2 ergibt ($|\mathfrak{D}_2| \neq 0$ vorausgesetzt):

$$\eta_2 = \mathfrak{D}_2^{-1} c - \mathfrak{D}_2^{-1} \mathfrak{D}_1 \eta_1$$

oder wenn man setzt: $\mathfrak{D}_2^{-1} = \bar{\mathfrak{S}}$ und $-\mathfrak{D}_2^{-1} \mathfrak{D}_1 = \bar{\mathfrak{T}}$:

$$\eta_2 = \bar{\mathfrak{S}} \cdot c + \bar{\mathfrak{T}} \cdot \eta_1 \quad \dots \quad (13).$$

Die Matrizen $\bar{\mathfrak{S}}$ und $\bar{\mathfrak{T}}$ mögen die folgenden Elemente haben:

$$\bar{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} s_{00} & \cdots & s_{05} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{50} & \cdots & s_{55} \end{pmatrix} \quad \bar{\mathfrak{T}} = \begin{pmatrix} -\sum_{\nu=0}^5 s_{0\nu} \cdot d_{\nu 0} & -\sum_{\nu=0}^5 s_{0\nu} \cdot d_{\nu 1} \\ \vdots & \vdots \\ -\sum_{\nu=0}^5 s_{5\nu} \cdot d_{\nu 0} & -\sum_{\nu=0}^5 s_{5\nu} \cdot d_{\nu 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{00} & t_{01} \\ \vdots & \vdots \\ t_{50} & t_{51} \end{pmatrix}$$

Führt man weiter die Matrizen:

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ s_{00} & \dots & s_{05} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{50} & \dots & s_{55} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ t_{00} & t_{01} \\ \vdots & \vdots \\ t_{50} & t_{51} \end{pmatrix}$$

ein, so kann man statt (13) schreiben:

$$\eta = \mathfrak{S} \cdot c + \mathfrak{T} \eta_1 \dots \dots \dots (14).$$

Führt man den Vektor: $p(x) = \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_7(x) \end{pmatrix}$ ein, so kann man die gesuchte Lösung (4) auch in der folgenden Form schreiben:

$$y(x) = p'(x) \cdot \eta \dots \dots \dots (4'),$$

wobei $p'(x)$ den zu $p(x)$ transponierten Vektor bedeuten soll.

Einsetzen von (14) in (4') ergibt:

$$y(x) = p'(x) \cdot \{\mathfrak{S}c + \mathfrak{T}\eta_1\} \dots \dots \dots (15)$$

$$\text{oder:} \quad p'(x) \mathfrak{T} \eta_1 = y(x) - p'(x) \mathfrak{S} \cdot c \dots \dots \dots (16).$$

Von der Gl. (16) gehen wir aus, um jetzt noch die Randwertaufgabe (2) zu erfüllen. Setzt man $x=+1$, $y=y(+1)$ und $x=-1$, $y=y(-1)$ in (16) ein, so erhält man zwei Gleichungen für Y und Y_1 , die man in Matrixform folgendermaßen schreiben kann:

$$\mathfrak{M} \cdot \eta_1 = r - \mathfrak{N} \cdot c \dots \dots \dots (17),$$

wobei:

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 1+t_{00} & +\dots+t_{50} & 1+t_{01} & +\dots+t_{51} \\ 1+t_{00} & -\dots-t_{50} & -1+t_{01} & -\dots-t_{51} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} \sum_{\nu=0}^5 s_{\nu 0} & \sum_{\nu=0}^5 s_{\nu 1} & \dots & \sum_{\nu=0}^5 s_{\nu 5} \\ \sum_{\nu=0}^5 (-1)^\nu s_{\nu 0} & \sum_{\nu=0}^5 (-1)^\nu s_{\nu 1} & \dots & \sum_{\nu=0}^5 (-1)^\nu s_{\nu 5} \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} y(+1) \\ y(-1) \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Aus (17) folgt für $|\mathfrak{M}| \neq 0$:

$$\eta_1 = \mathfrak{M}^{-1} (r - \mathfrak{N}c) \dots \dots \dots (18).$$

Einsetzen von (18) in (15) ergibt schließlich für die gesuchte Lösung von (1) und (2):

$$y(x) = p'(x) \{ (\mathfrak{S} - \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{M}^{-1} \mathfrak{N}) \cdot c + \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{M}^{-1} r \} \dots \dots \dots (19).$$

Außer der Entwicklung der Funktionen $a(x)$, $b(x)$ und $c(x)$ nach Legendreschen Polynomen ist als wesentliche Arbeit die Berechnung der Matrix \mathfrak{D} sowie der zu \mathfrak{D}_2 reziproken Matrix \mathfrak{D}_2^{-1} durchzuführen.

Ein Vorteil gegenüber anderen numerischen Lösungsverfahren besteht bei der hier entwickelten Methode darin, daß die allgemeine Lösung gewonnen wird. Man braucht also, wenn neue Randwerte $y(+1)$ und $y(-1)$ vorgegeben werden, nicht die ganze Rechnung von neuem zu beginnen, sondern hat nur in (19) für r diese neuen Werte einzusetzen.

Desgleichen hat man, wenn sich die rechte Seite $c(x)$ vor (1) ändert, d. h. der Vektor c , nur diese neuen Werte von c in (19) einzusetzen.

Selbst wenn sich die linke Seite von (1) ändert, spart man, falls sich entweder nur $a(x)$ oder nur $b(x)$ allein ändert, einen Teil der Arbeit bei der Neuberechnung von \mathfrak{D} , da man nur die Matrix \mathfrak{M} bzw. \mathfrak{B} neu zu berechnen braucht.

Beispiel:

$$y'' + x \cdot y' + \frac{1}{4}(x^2 + 1)y = e^{-x^2/4}.$$

Wegen $x = P_1(x)$ und $\frac{1}{4}(x^2 + 1) = \frac{1}{8}P_0(x) + \frac{1}{8}P_2(x)$ wird:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = 0, \quad A_6 = 0, \quad A_7 = 0,$$

$$B_0 = \frac{1}{8}, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{1}{8}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = 0, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = 0, \quad B_7 = 0.$$

Für die Matrizen \mathfrak{B} , \mathfrak{A} , \mathfrak{S} und \mathfrak{D} ergibt sich nach (10), (11) und (9):

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 10 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 42 & 0 & 81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 63 & 0 & 154 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 143 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{70} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{8}{21} & 0 & \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{17}{45} & 0 & \frac{5}{99} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{35} & 0 & \frac{29}{77} & 0 & \frac{15}{385} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{63} & 0 & \frac{44}{117} & 0 & \frac{7}{135} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 4\frac{1}{30} & 0 & 11 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 1\frac{2}{5} & 0 & 18\frac{3}{70} & 0 & 45 & 0 & 84 \\ \frac{1}{6} & 0 & 2\frac{8}{21} & 0 & 40\frac{1}{21} & 0 & 95 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 34\frac{7}{45} & 0 & 70\frac{5}{99} & 0 & 161 \\ 0 & 0 & \frac{3}{35} & 0 & 42\frac{9}{77} & 0 & 108\frac{15}{385} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{63} & 0 & 51\frac{44}{117} & 0 & 154\frac{7}{135} \end{pmatrix}$$

Gl. (12) zerfällt in diesem Beispiel in die beiden folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} 4\frac{1}{30} & 11 & 22 \\ 2\frac{8}{21} & 40\frac{1}{21} & 95 \\ \frac{3}{35} & 42\frac{9}{77} & 108\frac{15}{385} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_4 \\ Y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta_1$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 18\frac{3}{70} & 45 & 84 \\ 34\frac{7}{45} & 70\frac{5}{99} & 161 \\ \frac{5}{63} & 51\frac{44}{117} & 154\frac{7}{135} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_3 \\ Y_5 \\ Y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta_1$$

mit den Lösungen:

$$\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_4 \\ Y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,296\ 556\ 7 & -0,082\ 814\ 6 & 0,012\ 430\ 4 \\ -0,018\ 888\ 0 & 0,032\ 899\ 2 & -0,025\ 079\ 2 \\ 0,000\ 529\ 8 & -0,001\ 266\ 9 & 0,010\ 260\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,085\ 049\ 8 & 0 \\ 0,000\ 812\ 9 & 0 \\ 0,000\ 034\ 5 & 0 \end{pmatrix} \eta_1$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} Y_3 \\ Y_5 \\ Y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,063\ 098\ 0 & -0,041\ 197\ 6 & 0,008\ 650\ 3 \\ -0,003\ 226\ 6 & 0,017\ 626\ 9 & -0,016\ 662\ 5 \\ 0,000\ 080\ 1 & -0,000\ 593\ 9 & 0,007\ 068\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,084\ 217\ 6 \\ 0 & 0,002\ 754\ 5 \\ 0 & -0,000\ 052\ 7 \end{pmatrix} \eta_1$$

Die beiden in (19) auftretenden Matrizen $\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{M}^{-1}$ und $\mathfrak{S} - \mathfrak{X} \mathfrak{M}^{-1} \mathfrak{A}$ haben die folgenden Werte:

$$\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,545\ 972\ 2 & 0,545\ 972\ 2 \\ 0,544\ 375\ 2 & -0,544\ 375\ 2 \\ -0,046\ 434\ 8 & -0,046\ 434\ 8 \\ -0,045\ 846\ 0 & +0,045\ 846\ 0 \\ 0,000\ 443\ 8 & 0,000\ 443\ 8 \\ 0,001\ 499\ 5 & -0,001\ 499\ 5 \\ 0,000\ 018\ 8 & 0,000\ 018\ 8 \\ -0,000\ 028\ 7 & 0,000\ 028\ 7 \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{S} - \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{M}^{-1} \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -0,303\ 777\ 3 & 0 & 0,055\ 888\ 2 & 0 & 0,002\ 607\ 7 & 0 \\ 0 & -0,065\ 272\ 2 & 0 & 0,026\ 309\ 2 & 0 & 0,001\ 027\ 7 \\ 0,322\ 392\ 9 & 0 & -0,087\ 567\ 9 & 0 & 0,012\ 208\ 6 & 0 \\ 0 & 0,068\ 595\ 1 & 0 & -0,043\ 413\ 3 & 0 & 0,008\ 563\ 8 \\ -0,019\ 134\ 9 & 0 & 0,032\ 944\ 6 & 0 & -0,025\ 077\ 1 & 0 \\ 0 & -0,003\ 406\ 4 & 0 & 0,017\ 699\ 4 & 0 & -0,016\ 659\ 7 \\ 0,000\ 519\ 3 & 0 & -0,001\ 265\ 0 & 0 & 0,010\ 260\ 8 & 0 \\ 0 & 0,000\ 083\ 5 & 0 & -0,000\ 595\ 3 & 0 & 0,007\ 068\ 3 \end{pmatrix}$$

Für c findet man nach Z. angew. Math. Mech. 24 (1944), S. 71/76:

$$c = \begin{pmatrix} 0,922\ 565 \\ 0 \\ -0,149\ 977 \\ 0 \\ 0,006\ 391 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stellt man jetzt z. B. die Randwertaufgabe: $r = \begin{pmatrix} y(+1) \\ y(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so wird aus (19):

$$y(x) = p'(x) \cdot \begin{pmatrix} 0,257\,353 \\ 0,544\,375 \\ 0,264\,205 \\ -0,045\,846 \\ -0,022\,311 \\ 0,001\,500 \\ 0,000\,753 \\ -0,000\,029 \end{pmatrix}$$

Die Differentialgleichung des Beispiels ist andererseits exakt integrierbar und liefert als allgemeines Integral:

$$y(x) = e^{-x^{3/4}} \left(c_1 \cdot \operatorname{Coj} \frac{x}{2} + c_2 \cdot \operatorname{Sin} \frac{x}{2} - 4 \right).$$

Für die vorgelegte Randwertaufgabe wird aus diesem allgemeinen Integral die folgende spezielle Lösung:

$$y(x) = e^{-x^{3/4}} \left(4,116\,624 \operatorname{Coj} \frac{x}{2} + 1,232\,045 \operatorname{Sin} \frac{x}{2} - 4 \right).$$

Die folgende Tabelle liefert für einige x -Werte einen Vergleich dieser exakten Lösung mit der nach dem obigen Verfahren gewonnenen Näherungslösung:

x	y_{exakt}	$y_{\text{Näherung}}$
-0,6	-0,06572	-0,06574
-0,2	0,01366	0,01368
0,2	0,25803	0,25805
0,6	0,62006	0,62004 ^{*)}

^{*)} Kommt es nicht auf so hohe Genauigkeit an, so kann man die Reihe (4) früher abbrechen. Läßt man z. B. in (4) n nur bis 4 laufen, so wird jetzt \mathfrak{D}_2 eine Matrix von nur dritter Ordnung. Hierdurch vereinfacht sich die numerische Rechnung ganz wesentlich. In dem obigen Beispiel würde man statt der vorstehenden Tabelle die folgende erhalten:

x	y_{exakt}	$y_{\text{Näherung}}$
-0,6	-0,066	-0,064
-0,2	0,014	0,016
0,2	0,258	0,257
0,6	0,620	0,616

Eingegangen: 12. 4. 1950.

Die Berechnung vollständiger elliptischer Integrale dritter Gattung durch Reihen

Von M. Kolscher in Darmstadt

Die Berechnung dieser Integrale ist an sich möglich durch Rückführung auf die tabellierten Werte der unvollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung. Jedoch ist hierbei der Genauigkeit eine Grenze gesetzt durch Dichte und Stellenzahl der vorhandenen Tabellen. Außerdem wird das Verfahren unbrauchbar, wenn der Modul nahe bei 1 liegt. Für diesen Fall ist eine Reihe zur direkten Berechnung von G. H a m e l angegeben, welche aber versagt, wenn auch der Parameter noch nahe bei 1 liegt. Hier geben wir Reihen, welche in jedem Fall eine Berechnung erlauben.

The computation of integrals of the kind mentioned in the title is formally accomplished by regression to the already tabulated values of the incomplete elliptic integrals of the first and the second kind. The accuracy is limited, however, by the intervals and the number of decimal places to be found in the existing tables. Besides, the method fails, if the modulus is near to 1. In this case, G. H a m e l has stated a series for the immediate computation, which again fails, if the parameter is near to 1, too. Here, series are given, permitting the computation in either case.

L'évaluation d'intégrales elliptiques incomplètes du troisième espèce se peut faire en remontant aux tables des intégrales du premier et du second espèce. Mais l'exactitude y est limitée par le nombre des décimales et la „densité“ des tables existantes. De plus la méthode ne fonctionne pas, si le module est près de 1. Dans ce cas une série de Hamel permet une évaluation directe, sinon le paramètre est près de 1 lui aussi. Nous donnons des séries, qui permettent l'évaluation en tout cas.

Вычисление интегралов указанного в заглавии типа само по себе возможно путем приведения этих интегралов к уже вычисленным значениям эллиптических интегралов

первого и второго рода. Точность этого метода однако ограничена полнотой и точностью имеющихся таблиц. Кроме того этот способ непригоден в случае, когда модуль близок к единице. Для этого случая Г. Гамель дал ряд, позволяющий непосредственное вычисление этих интегралов, но который тоже непригоден, если и параметр близок к единице. Здесь даются ряды, позволяющие вычисление во всех случаях.

I. Anwendungsbereiche der Reihen

Als Normalform des vollständigen Integrals dritter Gattung werde benutzt

$$M(\lambda^2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \dots \dots \dots (1)$$

$$0 \leq k^2 \leq 1, \quad \lambda^2 > 0.$$

Ist $\lambda^2 > 1$, so soll der Cauchysche Hauptwert verstanden sein. Wir geben eine Reihe, welche nach Potenzen von k^2 fortschreitet und für $k^2 < 1$ konvergiert sowie eine nach Potenzen von $k'^2 = 1 - k^2$ fortschreitende Reihe, welche für $k'^2 < 1$ konvergiert. Praktisch sollen sie aber nur für kleines k^2 bzw. k'^2 Anwendung finden, so daß wenige Glieder bereits hohe Genauigkeit ergeben.

Liegt k^2 nicht in diesen günstigen Bereichen, so läßt sich durch Anwendung der Landenschen Transformation ein kleinerer Modul oder durch Umkehrung der Transformation ein größerer Modul erzielen. Das Ergebnis der Transformation ist angegeben. Es wird vorgeschlagen, für $k < 0,8$ (II d) und dann mit $k_1^2 < \frac{1}{16}$ die Reihe (II b) zu verwenden. Für $k > 0,8$ wird mit (II e) $k_2'^2 < \frac{1}{81}$ und hierfür ist Reihe (II c) zu verwenden. Die angegebenen Reihenglieder liefern bei einmaliger Transformation mindestens 8 Dezimalen.

II. Formelzusammenstellung

a) Hilfsgrößen:

$$k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad \varrho = 1 - \lambda^2, \quad \begin{array}{ll} \tau = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} & \text{für } \varrho > 0 \\ \tau = 0 & \text{für } \varrho \leq 0. \end{array}$$

b) Reihe für kleines k^2 :

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \cdot A_n(\tau, \lambda^2).$$

Darin ist für $\lambda^2 \geq k^2$:

$$\begin{aligned} A_0 &= \tau, \\ A_1 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda^2} (\tau - 1), \\ A_2 &= -\frac{1}{8} \frac{1}{\lambda^4} \left(\tau - 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \right), \\ A_3 &= -\frac{1}{16} \frac{1}{\lambda^6} \left(\tau - 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{3}{8} \lambda^4 \right), \\ A_4 &= -\frac{5}{128} \frac{1}{\lambda^8} \left(\tau - 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{3}{8} \lambda^4 - \frac{5}{16} \lambda^6 \right), \\ A_5 &= -\frac{7}{256} \frac{1}{\lambda^{10}} \left(\tau - 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{3}{8} \lambda^4 - \frac{5}{16} \lambda^6 - \frac{35}{128} \lambda^8 \right). \end{aligned}$$

und für $\lambda^2 < k^2$:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{3}{8} \lambda^4 + \frac{5}{16} \lambda^6 + \frac{35}{128} \lambda^8 + \frac{63}{256} \lambda^{10} + \dots, \\ A_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \lambda^2 + \frac{5}{16} \lambda^4 + \frac{35}{128} \lambda^6 + \frac{63}{256} \lambda^8 + \dots \right), \end{aligned}$$

$$A_2 = -\frac{1}{8} \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{16} \lambda^2 + \frac{35}{128} \lambda^4 + \frac{63}{256} \lambda^6 + \dots \right),$$

$$A_3 = -\frac{1}{16} \left(\frac{5}{16} + \frac{35}{128} \lambda^2 + \frac{63}{256} \lambda^4 + \dots \right),$$

$$A_4 = -\frac{5}{128} \left(\frac{35}{128} + \frac{63}{256} \lambda^2 + \dots \right),$$

$$A_5 = -\frac{7}{256} \left(\frac{63}{256} + \dots \right).$$

c) Reihe für kleines k'^2 :

$$M = M' + \ln \frac{4}{k'} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} k'^{2n} \cdot A_n \left(\frac{1}{\lambda}, \varrho \right) - \sum_{n=0}^{\infty} k'^{2n} \cdot w_n \quad (k, \lambda > 0).$$

Darin ist

$$M' = -\frac{1}{2\lambda} \sqrt{1 - \frac{k'^2}{\varrho}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{1-\lambda} + \sqrt{k-\lambda})^2}{1-k} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leq \lambda \leq k \\ \lambda \geq 1 \end{cases},$$

$$M' = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{k'^2}{\varrho} - 1} \cdot \arctg \sqrt{\frac{\lambda-k}{1-\lambda}} \quad \text{für} \quad k \leq \lambda < 1$$

und A_n wie vorher mit Ersetzung von τ, λ^2 durch $1/\lambda, \varrho$. Die erste Form der A_n ist für $|\varrho| \geq k'^2$, die zweite Form für $|\varrho| < k'^2$ anzuwenden. Die Berechnung der w_n erfolgt für $|\varrho| \geq k'^2$ aus den Hilfsgrößen.

$$B_0 = \frac{1}{4} \frac{1}{\lambda} \cdot (2 - \lambda - \lambda^2),$$

$$B_1 = \frac{1}{32} \frac{1}{\lambda(1+\lambda)} \cdot (-11 + 5\lambda + 4\lambda^2 - 6\lambda^3),$$

$$B_2 = \frac{1}{128} \frac{1}{\lambda(1+\lambda)^2} \cdot (-8 + 11\lambda + 27\lambda^2 - 10\lambda^3 - 20\lambda^4)$$

mittels

$$w_0 = \frac{1}{2\lambda} \cdot \ln \frac{2}{1+\lambda},$$

$$w_2 = \frac{1}{4\varrho} \cdot (w_1 + B_1),$$

$$w_1 = \frac{1}{2\varrho} \cdot (-w_0 + B_0),$$

$$w_3 = \frac{1}{6\varrho} \cdot (3w_2 + B_2).$$

Für $|\varrho| < k'^2$ ist

$$w_0 = \frac{1}{8} \varrho + \frac{7}{64} \varrho^2 + \frac{37}{384} \varrho^3 + \dots,$$

$$w_2 = -\frac{43}{3072} \varrho - \dots,$$

$$w_1 = \frac{1}{8} + \frac{7}{128} \varrho + \frac{29}{768} \varrho^2 + \dots,$$

$$w_3 = \frac{1}{3072} + \dots$$

d) Transformation zur Modulverkleinerung:

$$\lambda^2 \cdot M(\lambda^2, k) = (1 - k') \cdot K(k_1) - (1 + k') \cdot \lambda_1 \cdot M(\lambda_1^2, k_1),$$

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'},$$

$$\lambda_1 = \frac{1 - k' - \lambda^2}{1 + k' - \lambda^2}.$$

e) Transformation zur Modulvergrößerung:

$$\pm \lambda \cdot M(\lambda^2, k) = -\frac{k}{1+k} \cdot K(k_2) + \frac{k \pm \lambda}{1 \pm \lambda} \cdot M(\lambda_2^2, k_2),$$

$$k_2 = \frac{1 - k}{1 + k},$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{1+k} \cdot \frac{k \pm \lambda}{1 \pm \lambda}.$$

Im Bereich $k < \lambda < 1$ ist nur $+\lambda$ verwendbar.

f) Sonderfall:

Ist λ so klein, daß hierdurch in (c, d, e) ein zu großer Dezimalenverlust eintritt, so aus (1) durch Entwicklung nach λ^2 :

$$M = E + \lambda^2 \cdot \left[\frac{1 - k^2}{3 k^2} \cdot K - \frac{1 - 2 k^2}{3 k^2} \cdot E \right] + \lambda^4 \left[\frac{(2 + 4 k^2)(1 - k^2)}{15 k^4} K - \frac{2 + 3 k^2 - 8 k^4}{15 k^4} E \right] + \dots$$

III. Die Gewinnung der Reihe für kleines k^2

Es werde gesetzt

$$a_n = (-1)^n \cdot \binom{-1}{n}; \quad (-1)^n \cdot \binom{+1}{n} = \frac{a_n}{1 - 2 n} \dots \dots \dots (2).$$

Aus (1) folgt durch Reihenentwicklung der Wurzel für (IIb):

$$A_n = \frac{a_n}{1 - 2 n} \cdot R_n; \quad R_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n} \varphi}{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Zur bequemen Berechnung der R_n berechnen wir mit $|\delta| < 1$

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \cdot R_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \delta \sin^2 \varphi)(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)}.$$

Es wird für $\lambda^2 < 1$

$$R = \frac{1}{1 - \frac{\delta}{\lambda^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} - \frac{\delta}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\delta}{\lambda^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \delta}}$$

und für $\lambda^2 > 1$ der Cauchysche Hauptwert

$$R = -\frac{\delta}{\lambda^2} \frac{1}{1 - \frac{\delta}{\lambda^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \delta}}.$$

Hieraus sind durch Potenzreihenentwicklung nach δ die R_n und damit die bei (IIb) angegebenen Werte A_n zu finden.

Es ist leicht zu sehen, daß diese Reihe für alle λ^2 im Bereich $k^2 < 1$ konvergiert. Ist allerdings λ^2 klein, so tritt bei Berechnung der A_n ein mit n zunehmender Dezimalenverlust ein. Dies stört nicht, wenn $\lambda^2 > k^2$ ist. Ist aber $\lambda^2 < k^2$, so können wir auf die Darstellung der A_n in geschlossener Form verzichten und erhalten durch Reihenentwicklung nach λ^2 die Form, in der kein Dezimalenverlust eintritt.

Übrigens gilt für M die Differentialgleichung

$$(\lambda^2 - k^2) \cdot \frac{dM}{dk} + k \cdot M = k \cdot K \dots \dots \dots (3)$$

mit K als vollständigem elliptischen Integral erster Gattung. Setzen wir hierfür die bekannte Reihe ein, so folgt

$$(\lambda^2 - k^2) \cdot \frac{d\left(\frac{2}{\pi} M\right)}{dk} + k \cdot \left(\frac{2}{\pi} M\right) = k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot k^{2n} \dots \dots \dots (4)$$

und wir stellen fest, daß unser M die einzige Lösung dieser bei $k = \lambda$ singulären Differentialgleichung ist, welche auch dort noch regulär bleibt.

IV. Die Gewinnung der Reihe für kleines k^2

Für $k = 1$ bleibt zwar M endlich, aber $\frac{dM}{dk}$ wird logarithmisch unendlich. Zur Erfassung der bei $k = 1$ liegenden Singularität setzen wir in (1) $\sin \varphi = x$ und $\varepsilon = 1 - k$. Es wird für $\varepsilon < 1$

$$M = \int_0^1 \sqrt{1 - \varepsilon} \frac{x}{1 + x} \cdot \frac{1}{1 - \lambda^2 x^2} \cdot \sqrt{\frac{1 - kx}{1 - x}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 - 2 n} \cdot \varepsilon^n \cdot S_n \dots \dots \dots (5)$$

mit

$$S_n = \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x} \right)^n \cdot \frac{1}{1-\lambda^2 x^2} \cdot \sqrt{\frac{1-kx}{1-x}} dx.$$

Wir berechnen das Hilfsintegral

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n = \int_0^1 \frac{1+x}{[1-\lambda x] \cdot [1+\lambda x] \cdot [1+(1-\delta)x]} \cdot \sqrt{\frac{1-kx}{1-x}} dx.$$

Dies ist elementar möglich und liefert

$$S = S' + S'' + S'''$$

mit

$$S' = -\frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{k-\lambda}{1-\lambda}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{1-\lambda} + \sqrt{k-\lambda})^2}{1-k} \quad \text{für } 0 \leq \lambda \leq k \text{ und } \lambda \geq 1$$

oder

$$S' = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda-k}{1-\lambda}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda-k}{1-\lambda}} \quad \text{für } k \leq \lambda < 1$$

sowie

$$S'' = \frac{1-\lambda}{2\lambda(1-\lambda-\delta)} \cdot \sqrt{\frac{k+\lambda}{1+\lambda}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{k+\lambda})^2}{1-k},$$

$$S''' = \frac{-\delta}{(1+\lambda-\delta)(1-\lambda-\delta)} \cdot \sqrt{\frac{1+k-\delta}{2-\delta}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{2-\delta} + \sqrt{1+k-\delta})^2}{1-k}.$$

Entsprechend wird

$$S = S'_n + S''_n + S'''_n,$$

wobei diese Werte durch Reihenentwicklung nach δ aus S' , S'' , S''' zu gewinnen sind. Entsprechend wird ferner

$$M = M' + M'' + M''' \dots \dots \dots (6).$$

So folgt aus der ersten Form von S'

$$S'_n = \frac{1}{(1+\lambda)^n} \cdot \left(-\frac{1}{2\lambda} \right) \cdot \sqrt{\frac{k-\lambda}{1-\lambda}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{1-\lambda} + \sqrt{k-\lambda})^2}{1-k}$$

und daraus nach (5), (6)

$$M' = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1-2n} \left(\frac{\varepsilon}{1+\lambda} \right)^n \right\} \cdot \left(-\frac{1}{2\lambda} \right) \sqrt{\frac{k-\lambda}{1-\lambda}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{1-\lambda} + \sqrt{k-\lambda})^2}{1-k}.$$

Darin wird

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1-2n} \left(\frac{2}{1+\lambda} \right)^n = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{1+\lambda}} = \sqrt{\frac{k+\lambda}{1+\lambda}},$$

so daß für M' ein geschlossener Ausdruck gefunden ist. Ebenso wird mit der zweiten Form von S' verfahren.

Dieselbe Rechnung ist auch mit S'' möglich, aber nicht mit S''' , das δ in sehr komplizierter Form enthält. Aus beiden erhalten übrigens S''_n , S'''_n Nenner mit Potenzen von $1-\lambda$. Daher wird M''' nur eine Reihe geben, welche für $\left| \frac{\varepsilon}{1-\lambda} \right| < 1$ konvergiert.

Dies kann durch Zusammenfassung mit M'' vermieden werden.

Zunächst setzen wir

$$\ln \frac{1}{1-k} = \ln \frac{16}{1-k^2} + \ln \frac{1+k}{16} = 2 \cdot \ln \frac{4}{k'} + \ln \frac{2-\varepsilon}{16}$$

und an allen anderen Stellen auch $k = 1 - \varepsilon$. Dann wird

$$S'' + S''' = \ln \frac{4}{k'} \cdot P - Q$$

mit

$$P = \frac{2}{1-\lambda-\delta} \cdot \left\{ \frac{1-\lambda}{2\lambda} \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{1+\lambda}} - \frac{\delta}{1+\lambda-\delta} \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2-\delta}} \right\}$$

$$Q = \frac{1}{1-\lambda-\delta} \cdot \left\{ -\frac{1-\lambda}{2\lambda} \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{1+\lambda}} \cdot \left[\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \ln\frac{1+\lambda}{2} + 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{1+\lambda}}\right) \right] \right. \\ \left. + \frac{\delta}{1+\lambda-\delta} \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2-\delta}} \cdot \left[\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right) + 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2-\delta}}\right) \right] \right\}$$

Die Ausdrücke in den geschweiften Klammern verschwinden für $\delta = 1 - \lambda$. Daher sind P, Q auch hier regulär. Durch Reihenentwicklung nach ε wird

$$S'' + S''' = \ln \frac{4}{k'} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \cdot P_{\nu} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \cdot Q_{\nu},$$

worin P_{ν}, Q_{ν} auch bei $\delta = 1 - \lambda$ reguläre Funktionen von δ, λ sind. Insbesondere wird

$$P_0 = \frac{1+\lambda}{\lambda(1+\lambda-\delta)}; \quad Q_0 = \frac{1}{1-\lambda-\delta} \left\{ -\frac{1-\lambda}{2\lambda} \cdot \ln \frac{1+\lambda}{2} + \frac{\delta}{1+\lambda-\delta} \cdot \ln \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \right\}.$$

Werden nun die P_{ν}, Q_{ν} nach Potenzen von δ entwickelt, so ist daraus zu finden

$$S''_n + S'''_n = \ln \frac{4}{k'} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \cdot P_{\nu,n} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \cdot Q_{\nu,n}.$$

Insbesondere wird

$$P_{0,0} = \frac{1}{\lambda}, \quad Q_{0,0} = \frac{1}{2\lambda} \cdot \ln \frac{2}{1+\lambda}.$$

Damit erhält auch $M'' + M'''$ aus (5) eine entsprechende Form. Führen wir noch $\varepsilon = 1 - \sqrt{1-k'^2}$ als Potenzreihe nach k'^2 ein, so wird endlich

$$M'' + M''' = \ln \frac{4}{k'} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cdot k'^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cdot k'^{2n} \quad \dots \quad (7)$$

und darin

$$v_0 = P_{0,0}; \quad w_0 = Q_{0,0} \quad \dots \quad (8).$$

Die Berechnung weiterer Glieder auf diesem Wege ist aber unbequem. Daher führen wir in (3) k' als Variable ein. Es folgt

$$(\varrho - k'^2) \cdot \frac{dM}{dk'} + k' \cdot M = k' \cdot K \quad \dots \quad (9).$$

Gemäß (6), (7) setzen wir ein

$$M = M' + \ln \frac{4}{k'} \cdot V - W,$$

wo V, W die durch (7) definierten Potenzreihen sind, und M' nach (IIc).

Mit der für beide Formen von M' gültigen Relation

$$(\varrho - k'^2) \cdot \frac{dM'}{dk'} + k' \cdot M' = (\varrho - k'^2) \cdot \frac{1+k}{k k'} \cdot \frac{1}{2\lambda} \cdot \sqrt{\frac{k+\lambda}{1+\lambda}}$$

und der bekannten Reihe

$$K = \ln \frac{4}{k'} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 k'^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 b_n \cdot k'^{2n}$$

$$a_n \text{ nach (2);} \quad b_1 = 1; \quad b_{n+1} = b_n + \frac{2}{(2n+1)(2n+2)}$$

folgt aus (9)

$$(\varrho - k'^2) \cdot \frac{dV}{dk'} + k' \cdot V = k' \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \cdot k'^{2n} \quad \dots \quad (10)$$

$$(\varrho - k'^2) \cdot \frac{dW}{dk'} + k' \cdot W = (\varrho - k'^2) \cdot \frac{1+k}{k k'} \cdot \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{k+\lambda}{1+\lambda}} - \frac{\varrho - k'^2}{k'} \cdot V + k' \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 b_n k'^{2n} \quad \dots \quad (11).$$

Die Gl. (10) geht aus (4) hervor, wenn darin k^2, λ^2 durch k'^2, ϱ ersetzt werden einschließlich des entsprechenden Anfangswertes. Daher ist die Lösung bekannt.

In (11) läßt sich die rechte Seite in eine Potenzreihe der Form $k' \cdot \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot k'^{2n}$ bringen und liefert danach bei bekanntem Anfangswert w_0 die weiteren Koeffizienten w_n von W . Ebenso wie bei den anderen Reihen ist auch hier $k'^2 = |\varrho|$ nur scheinbar Konvergenzgrenze. Für $\varrho_1 < k'^2$ ist zur Vermeidung des Dezimalenschwundes Reihenentwicklung nach ϱ durchgeführt.

V. Zusätze

Die Legendre Normalform ist

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda^2, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi) \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = -\frac{k^2}{\lambda^2 - k^2} \cdot K(k) + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - k^2} \cdot M(\lambda^2, k).$$

Das Integral

$$N = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 + \mu^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \mu^2 > 0$$

wird durch (II d) mit $\lambda^2 = -\mu^2$ in ein Integral der Form (1) mit $k_1^2 < \lambda_1^2 < 1$ übergeführt.

VI. Zahlenbeispiel

Zur Kontrolle wurde der Fall $\lambda = 0,9$; $k = 0,8$ durchgerechnet. Mit (II d) wird $k_1 = \frac{1}{4}$; $\lambda_1 = -\frac{41}{79}$. Hiernach wurden von (II b) die angegebenen sechs Glieder in der ersten Form berücksichtigt. Zum Vergleich wurde auch nach (II e) gerechnet, wofür $k_2^1 = \frac{1}{9}$, $\lambda_2 = \frac{170}{171}$ wird. Danach wurde mit allen Gliedern von (II c) in der zweiten Form, wegen $\varrho_2 = \frac{1}{171} < k_2'^2$, gerechnet. Beide Rechnungen gaben übereinstimmend

$$M(0,81; 0,8) = 2,6400\ 284.$$

Bei anderen Werten von k ist die gleiche Genauigkeit mit weniger Gliedern erreichbar, so daß der ungünstigste Wert gewählt wurde. Der Wert für λ wurde so gewählt, daß die Hamelsche Reihe nicht mehr konvergiert.

Eingegangen: 24. 4. 1950.

Analytische Untersuchungen und konstruktive Erweiterungen zu den graphischen Integrationsverfahren von Meißner und Grammel

Von Rudolf Ludwig in Braunschweig¹⁾

Für die graphischen Integrationsverfahren von Grammel und Meißner existierten bisher weder eine analytische Behandlung der Konstruktionen noch eine daraus sich ergebende Fehlerbetrachtung. Die analytischen Rechnungen führen für die Grammelschen Polaren zu den Verfahren mit den kleinsten Fehlern und für die Meißnerschen Linienbilder zu neuen Konstruktionen, die in einer eigenartigen Analogie zu den Grammelschen Methoden stehen und die nur mit einem Fehler in der Größenordnung des Fehlers bei der Simpson'schen Regel behaftet sind.

For the graphical methods of integration due to Grammel and Meissner, neither an analytical treatment nor a computation of the error based on the former, were existing till now. The computation leads to conclusions that keep, in the case of Grammel's polars, the errors as small as possible, and give, in the case of Meissner's line diagrams, new constructions. These are, in a particular manner, analogous to Grammel's methods, and are affected only with an error, the order of which is the same as that of Simpson's rule.

Pour la méthode graphique d'intégration de Grammel et de Meissner il n'y avait jusqu'à présent ni un traitement analytique des constructions ni une méthode pour l'évaluation d'erreurs basée sur un tel traitement. Par les opérations analytiques on obtient le procédé au moindre erreur dans le cas des polaires de Grammel et, dans le cas du diagramme de Meissner, des constructions nouvelles. Celles-ci sont remarquablement analogues aux méthodes de Meissner; l'erreur est du même ordre de grandeur que celui de la règle de Simpson.

¹⁾ Diese Arbeit und zwei demnächst erscheinende Arbeiten entstanden bei meinen wissenschaftlichen Arbeiten am Institut für Angewandte Mathematik und Darstellende Geometrie der Technischen Hochschule Braunschweig (Prof. Dr. Rehbock).

Для графических методов интегрирования Граммеля и Мейснера до сих пор еще нет ни аналитического исследования этих конструкций ни оценок погрешностей, вытекающих из такого исследования. Аналитические расчеты приводят в случае поляра Граммеля к методам с наименьшей возможной погрешностью, а в случае линейных диаграмм Мейснера к новым конструкциям, которые аналогичны методам Граммеля и которым соответствует погрешность того-же порядка, как и в случае применения правила Симпсона.

Einleitung

In den folgenden Ausführungen wird von den Arbeiten von Meißner [1] und Grammel [2], [3] über graphische Integrationsmethoden ausgegangen. Durch analytische Behandlung der Grammelschen Konstruktionen ist es erst möglich, die günstigste Art dieser Konstruktionen herzuleiten, bei denen man den Fehler abschätzen und vor allem möglichst klein machen kann. Die Vorteile dieser Konstruktionen werden dann in geeigneter Weise auf die Meißnerschen Linienbilder einer Funktion übertragen. Aus der analytischen Formulierung der Konstruktionsverfahren gehen auch praktisch verwendbare, numerische Integrationsformeln hervor. Während hier also Methoden für bestimmte Integrale behandelt werden, soll es einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben, die Verfahren auf Differentialgleichungen auszudehnen.

Das analytische Verfahren

Zum Zwecke der Fehleruntersuchung wird den geometrischen Konstruktionen die analytische Rechnung gegenübergestellt. Dabei wird ein Vektor P der Länge y und der Amplitude x in der Gaußschen Zahlenebene durch $P = ye^{ix}$ dargestellt. Je nach Zweckmäßigkeit wird im folgenden sowohl von dem Vektor P als auch von dem Punkt P als Endpunkt des Vektors gesprochen.

Für zwei Vektoren $P_1 = y_1 e^{ix_1}$ und $P_2 = y_2 e^{ix_2}$ wird das skalare Produkt eingeführt:

$$P_1 \cdot P_2 = y_1 y_2 \cos(x_1 - x_2).$$

Für den zum Vektor P_2 gehörenden Einheitsvektor e_{P_2} gilt also z.B:

$$P_1 \cdot e_{P_2} = y_1 \cos(x_1 - x_2).$$

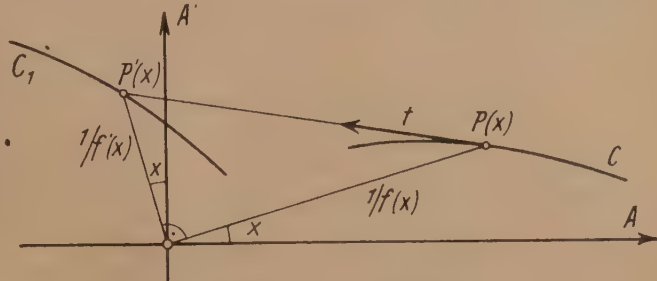


Bild 1. Grammelsche Polaren

1. Die Grammelschen Polaren

1.1. Die Darstellungen einer Funktion und ihrer Ableitungen (Bild 1)

Als Bild der Funktion $y=f(x)$ wird die Grammelsche Polare (C) definiert durch die Kurve, die der Endpunkt des von x abhängigen Vektors

$$P(x) = \frac{1}{f(x)} e^{ix} \quad (C) \quad \dots \quad (1)$$

beschreibt. In ähnlicher Weise werden die Bilder der Ableitungen von $f(x)$, die Orthopolaren (C_k), definiert:

$$P'(x) = \frac{i}{f'(x)} e^{ix} \quad (C_1) \quad \dots \quad (2),$$

$$P^{(k)}(x) = \frac{i^k}{f^{(k)}(x)} e^{ix} \quad (C_k) \quad \dots \quad (3).$$

Die Haupteigenschaft der Polaren und Orthopolaren läßt sich nach Grammel folgendermaßen aussprechen:

Satz 1: Die Tangente in einem Punkt der Polaren (C) [bzw. einer Orthopolar (C_k)] geht durch den zugehörigen Punkt der Orthopolaren (C_1) [bzw. der darauf folgenden Orthopolaren (C_{k+1})].

„Zugehörige Punkte“ sollen stets solche genannt werden, die verschiedenen Polaren bei gleichem Argument x angehören.

Beweis: Einen Tangentenvektor $t(x)$ in einem Punkt $P(x)$ der Polaren (C) erhält man durch Differentiation des Vektors $P(x)$ nach x :

$$t(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} \left(\frac{i}{f'(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) e^{ix} = \frac{f'(x)}{f(x)} (P'(x) - P(x)).$$

Daher ist

$$P(x) + \lambda t(x) = P'(x).$$

mit $\lambda = f(x)/f'(x)$, womit der Satz bewiesen ist.

1.2. Die Integration nach dem Sehnungsverfahren (Bild 2)

Bei der Grammelschen Darstellungsweise der Funktion und ihrer Ableitungen besteht das Integrationsproblem darin, aus der bekannten Orthopolaren die Polare zu konstruieren. Die gegebene Orthopolare ist also für die Funktion $f(x)$ zu zeichnen:

$$P'(x) = \frac{ie^{ix}}{f(x)} \quad \text{mit den Punkten} \quad P'_k = \frac{ie^{i(x_k + t\varepsilon)}}{f_k},$$

wobei

$$x_k = x_0 + k\varepsilon,$$

$$\bar{f}_k = f(x_k + t\varepsilon), \quad t < 0 < 1.$$

ε ist die noch näher zu erläuternde Schrittweite des Verfahrens. Um das Integral $\int_{x_k}^{x_k + \varepsilon} f(x) dx$ näherungsweise zu bestimmen, soll aus dem Vektor $P_k = \frac{e^{ix}}{g_k}$ der neue Vektor $P_{k+1} = \frac{e^{i(x_k + \varepsilon)}}{g_{k+1}}$ dadurch bestimmt werden, daß man auf der Sehne des Kurvenzuges fortschreitet. Aus Bild 2 folgt sofort

$$P'_k = (1 - \lambda_1) P_k + \lambda_1 P_{k+1}.$$

Um λ_1 zu bestimmen, wird diese Vektorgleichung skalar mit $e_{P'_k}$ multipliziert, also ist:

$$\lambda_1 = \frac{\bar{P}'_k \cdot e_{P'_k}}{P_{k+1} \cdot e_{P'_k}} = \frac{g_{k+1} \cos t\varepsilon}{f_k \sin \varepsilon}.$$

Daraus folgt nach kurzer Rechnung:

$$g_{k+1} = g_k \frac{\cos(1-t)\varepsilon}{\cos t\varepsilon} + \bar{f}_k \frac{\sin \varepsilon}{\cos t\varepsilon}.$$

Man sieht, daß nur für $t=1/2$ der Näherungswert des Integrals vom Anfangswert auf dem Vektor $P_k = \sigma e_{P_k}$, d. h. von σ unabhängig ist. Grammel spricht z. B. nur vom „Bogenmittelpunkt“ eines Schrittes, aber nicht exakt von der Winkelhalbierenden. Für $t=1/2$ gilt

$$g_{k+1} = g_k + 2\bar{f}_k \sin \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots \quad (4).$$

Reiht man n Schritte in gleicher Weise aneinander, so ergibt sich

$$g_n = g_0 + 2[f_0 + \bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_{n-1}] \sin \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es ist also

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx g_n - g_0 = 2[f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}] \sin \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots \quad (5).$$

Man kann das Verfahren noch so modifizieren, daß man die Orthopolare verzerrt, indem man aufträgt

$$P'_k = \frac{ie^{i(x_0 - k\varepsilon)}}{f(x_0 + kh)}, \quad \text{wobei} \quad \sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{n}{2}.$$

So erhält man als Integrationsformel die bekannte Maclaurinsche Regel:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = h(f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}) + R_n^{(M)} \quad \dots \quad (6).$$

1.3. Die Integration nach dem Tangentenverfahren (Bild 3)

Wie in (1,2) sind die Punkte P'_k und P'_{k+1} der Orthopolaren und der Punkt P_k der Polaren bekannt. Man findet P_{k+1} , indem man auf der Tangente in P_k vorwärts geht bis zum „Halbie-

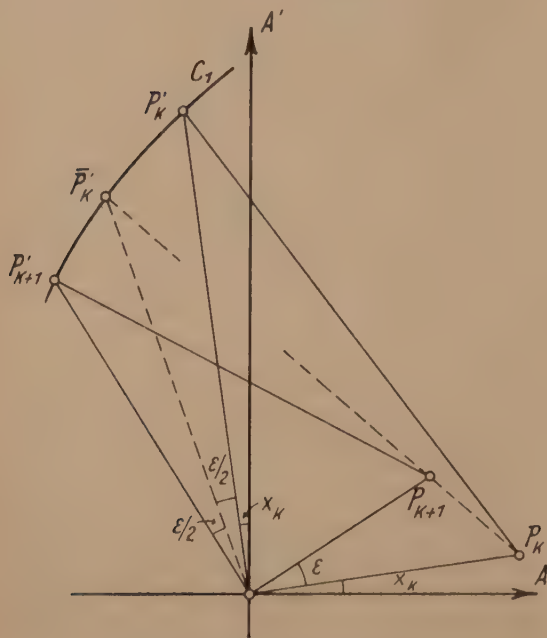


Bild 2. Grammelsches Sehnungsverfahren

rungspunkt“ von $P_k P_{k+1}$, wie Grammel sagt, d. h. exakter bis zur Winkelhalbierenden [wie eine Rechnung ähnlich der von (1,2) zeigt] und dann in der Tangentenrichtung des gesuchten Punktes diesen erreicht.

1. Schritt:

$$P'_k = \lambda_2 P_k + (1 - \lambda_2) P_k,$$

$$P_k = \frac{e^{i(x_k + \frac{\varepsilon}{2})}}{f_k \cos \frac{\varepsilon}{2} + g_k \sin \frac{\varepsilon}{2}};$$

2. Schritt:

$$P'_{k+1} = \mu_1 P_{k+1} + (1 - \mu_1) P_k,$$

$$P_{k+1} = \frac{e^{i(x_k + \varepsilon)}}{g_k + (f_k + f_{k+1}) \lg \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Also liefert die Integration über ein Intervall:

$$g_{k+1} - g_k = (f_k + f_{k+1}) \lg \frac{\varepsilon}{2},$$

und über n Intervalle:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx g_n - g_0 = (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) \lg \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots \quad (7).$$

Durch eine ähnliche Modifizierung der Polaren wie in (1,2), indem man für die Schrittweite $\lg \frac{\varepsilon}{2} = \frac{h}{2}$ setzt, erhält man die bekannte Trapezregel:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) + R_n^{(T)} \quad \dots \quad (8).$$

2. Die Meißnerschen Linienbilder

2.1. Die Darstellungen einer Funktion und ihrer Ableitungen durch Polaren und Linienbilder (Bild 4)

Die Meißnerschen Polaren unterscheiden sich von den Grammelschen dadurch, daß die Länge des Vektors gleich dem Funktionswert selbst und nicht gleich dem reziproken Wert desselben ist. Dies vereinfacht das Verfahren. Die Meißnerschen Polaren werden also durch folgende Vektoren definiert:

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= f(x) e^{ix} \\ P^{(k)}(x) &= i^k f^{(k)}(x) e^{ix} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (C), \\ (C_k) \end{array} \quad \dots \quad (9).$$

Darüber hinaus werden aber von Meißner noch die Linienbilder eingeführt, deren Punkte man durch vektorielle Addition zugehöriger Vektoren (d. h. Vektoren für dasselbe Argument x) aufeinander folgender Polaren erhält, also:

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= P(x) + P'(x) \\ Q^{(k)}(x) &= P^{(k)}(x) + P^{(k+1)}(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (L), \\ (L_k) \end{array} \quad \dots \quad (10).$$

Die Haupteigenschaften der Polaren und Linienbilder kann man in den folgenden drei Sätzen zusammenfassen:

Satz 2: Die Normale in einem Punkt des Polarbildes (C) [bzw. C_k] geht durch den zugehörigen Punkt des Polarbildes (C_1) [bzw. C_{k+1}] der ersten [bzw. $(k+1)$ -ten] Ableitung.

Beweis:

$$N = i \frac{dP(x)}{dx} = [-f(x) + if'(x)] e^{ix} = -P(x) + P'(x).$$

(Dies ist der bekannte Satz über die Polarsubnormale!)

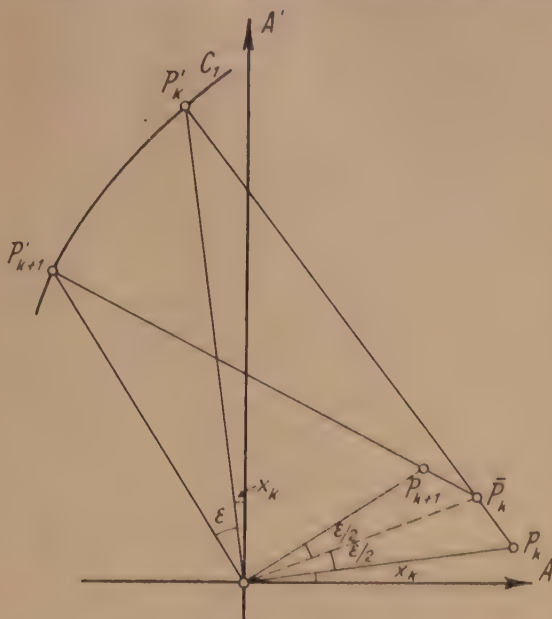


Bild 3. Grammelsches Tangentenverfahren

Satz 3a: Die Tangente in einem Punkt $Q(x)$ des Liniensbildes L (bzw. L_k) ist das Lot im Endpunkt des Vektors $P(x)$ der Polaren C (bzw. C_k) auf diesem Vektor.

Satz 3b: Das Liniensbild L ist die Hüllkurve aller Lote in den Endpunkten der Vektoren P_k der Polaren C (entsprechend für L_k und C_k) auf diesem Vektor.

Beweis: Tangente des Liniensbildes: $T = \frac{dQ(x)}{dx}$;

Normale des Liniensbildes: $N = i T = -[f(x) + f''(x)] e^{ix} = \varrho e_P$.

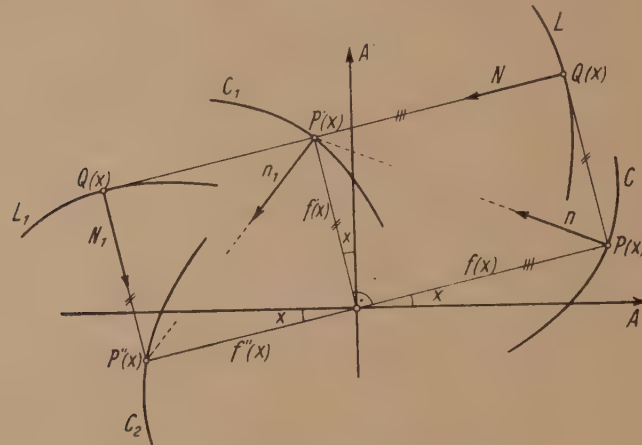


Bild 4. Meißnersche Polaren und Liniensbilder

Satz 4: Der Krümmungsmittelpunkt für einen Punkt des Liniensbildes L (bzw. L_k) ist der zugehörige Punkt des darauf folgenden ersten [bzw. $(k+1)$ -ten] Liniensbildes L_1 (bzw. L_{k+1}).

Beweis: Aus $Q(x) = [f(x) + if'(x)]e^{ix} = \xi + i\eta$ folgt nach der bekannten Formel für den Krümmungsradius ebener Kurven in Parameterdarstellung:

$$\varrho = \frac{(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)^{3/2}}{\xi \ddot{\eta} - \ddot{\xi} \eta} = f' + f''.$$

Einige Hinweise sollen noch gegeben werden über Besonderheiten im Kurvenverlauf der Polaren und Liniensbilder, deren Kenntnis für Konstruktionen vorteilhaft ist.

Über die Schnittpunkte von Polaren und Liniensbildern in zugehörigen Punkten gilt:

Satz 5: Polare und Liniensbild haben dort gemeinsame Punkte und Tangenten, wo die erste Ableitung der Funktion verschwindet.

Beweis: Schnittpunkt von Polarbild C und Liniensbild L :

$$P(x) = Q(x) = P(x) + P'(x),$$

$$\text{also} \quad P'(x) = 0 \quad \text{oder} \quad f'(x) = 0.$$

Geometrisch sieht man leicht ein, daß beide Kurven an der betrachteten Stelle eine gemeinsame Tangente haben.

Satz 6: Das Polarbild der ersten Ableitung und das Liniensbild einer Funktion schneiden sich in Punkten, für die die Funktion verschwindet.

Beweis: Schnittpunkt der 1. Polaren C_1 mit dem Liniensbild L :

$$P'(x) = Q(x) = P(x) + P'(x),$$

$$\text{also} \quad P(x) = 0 \quad \text{oder} \quad f(x) = 0.$$

Aus einer Figur folgt sofort für den Schnittwinkel der beiden Kurven:

$$\text{tg } \alpha = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Eine Singularität des Linienbildes behandelt der

Satz 7: Wenn $f(x) + f''(x) = 0$ ist, so hat das Linienbild der Funktion im allgemeinen an dieser Stelle eine Spitze.

Beweis: Der Tangentenvektor $T(x)$ des Linienbildes $Q(x)$

$$T(x) = \frac{dQ(x)}{dx} = i[f(x) + f''(x)] e^{ix}$$

kann verschwinden, d. h. kinematisch betrachtet, die Bahngeschwindigkeit wird Null.

2.2. Die Integration nach dem Sehnungsverfahren für Linienbilder (Bild 5)

Bei der Darstellung einer Funktion durch die Meißnerschen Polaren und Linienbilder besteht das Integrationsproblem darin, aus der 1. Polaren C_1 unter Verwendung des Linienbildes L die Polare C zu konstruieren. Hierbei wird im Gegensatz zu Meißner von dem Satz 3 über die Krümmung der Linienbilder kein Gebrauch gemacht. Solche Konstruktionen lassen sich weniger leicht analytisch bis zu praktisch brauchbaren Fehlerabschätzungen überblicken und gestatten nicht ohne weiteres die später beabsichtigten Anwendungen auf Differentialgleichungen 1. Ordnung. Die hier angewandten Konstruktionen weisen eine eigentümliche Analogie zu denen von Grammel auf. Sie sind ebenso einfach, erlauben aber die direkte Ablesung der Funktionswerte ohne Berechnung reziproker Werte.

Mit den Punkten der Polaren:

$$P'_k = if_k e^{ix_k}, \quad P'_{k+1} = if_{k+1} e^{i(x_k + \varepsilon)}, \quad P_k = g_k e^{ix_k}$$

ist gleichzeitig der Punkt $Q_k = P_k + P'_k$ des Linienbildes gegeben. Den Punkt Q_{k+1} erreicht man auf der Sehne, die parallel zum mittleren

Vektor P_k ist. Also

$$Q_{k+1} = P_{k+1} + \varrho_1 e_{P'_{k+1}} = Q_k + \sigma_1 e_{\bar{P}_k},$$

wobei ϱ_1 und σ_1 zu bestimmende Skalare sind

und $e_{\bar{P}_k} = i e^{i(x_k + \frac{\varepsilon}{2})}$ ist. Durch skalare Multiplikation obiger Vektorgleichung mit $e_{\bar{P}_k}$ findet man:

$$\varrho_1 = g_k + (f_k + f_{k+1}) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}$$

und daraus

$$P_{k+1} = \left[g_k + (f_k + f_{k+1}) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \right] e^{i(x_k + \varepsilon)}.$$

Es ergibt sich also wieder die Gl. (7):

$$g_{k+1} - g_k = (f_k + f_{k+1}) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also gilt der Satz 8:

Die Integrationsmethoden nach dem Sehnungsverfahren für Linienbilder und nach dem Grammelschen Tangentenverfahren liefern die gleichen Ergebnisse, nämlich die Trapezregel¹⁾.

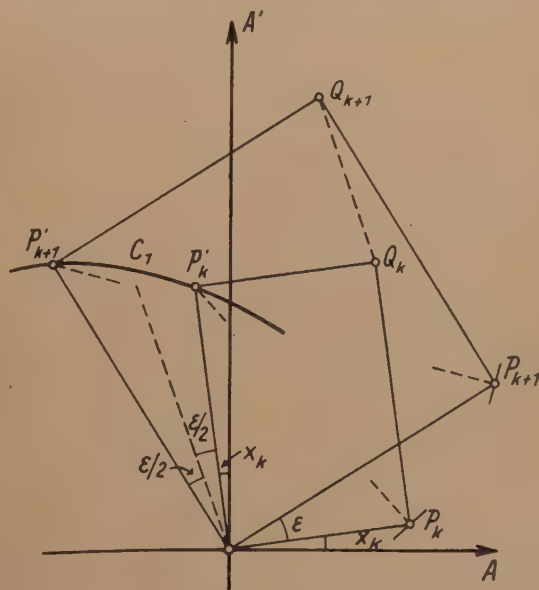


Bild 5. Sehnungsverfahren für Linienbilder

2.3. Die Integration nach den Tangentenverfahren für Linienbilder (Bild 6)

Entsprechend wie in Abschn. 1.3 erfolgt die Integration über ein Intervall in zwei Schritten, indem man in der Tangentenrichtung des Linienbildes bis zur „Mitte“ geht und dann in der Tangentenrichtung des gesuchten Punktes diesen erreicht. Gegeben sind also wieder P_k , P'_k , \bar{P}_k , P'_{k+1} und damit auch Q_k .

¹⁾ In der modifizierten Form nach Gl. (7).

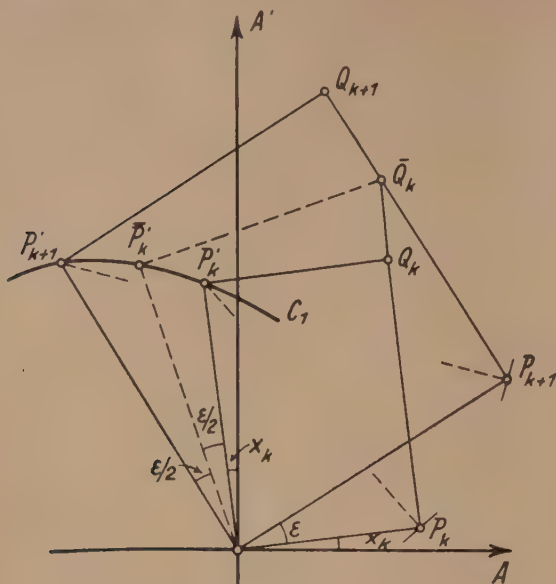


Bild 6. Tangentenverfahren für Linienbilder

1. Schritt:

$$Q_k = P_k + \varrho_2 e_{P'_k} = \bar{P}_k + \sigma_2 e_{P'_k}$$

liefert

$$\varrho_2 = \frac{1}{\cos \varepsilon/2} \left(\bar{f}_k + g_k \sin \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

2. Schritt:

$$P'_{k+1} + \varrho_3 e_{P'_{k+1}} = \bar{Q}_k + \sigma_3 e_{P'_{k+1}}$$

ergibt

$$\varrho_3 = g_k + 2\bar{f}_k \sin \frac{\varepsilon}{2} \dots (12).$$

Man erhält also Gl. (4) aus Abschn. 1,2:

$$g_{k+1} - g_k = 2\bar{f}_k \sin \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also gilt der Satz 9:

Die Integrationsmethoden nach dem Tangentenverfahren für Linienbilder und nach dem Grammelschen Sehnenverfahren liefern die gleichen Ergebnisse, nämlich die Maclaurinsche Regel¹⁾.

2.4. Restabschätzungen für das Sehnen- und Tangentenverfahren

Das kombinierte Sehnen-Tangentenverfahren für Linienbilder

Für das Sehnen- und Tangentenverfahren mit der Festlegung der Schrittweite durch $\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{h}{2}$ bzw. $\tan \frac{\varepsilon}{2} = \frac{h}{2}$ ergeben sich die bekannten Restglieder für die Trapez- bzw. Maclaurinsche Regel:

$$\left. \begin{aligned} R^{(T)} &= -\frac{h^3}{12} f''(x_0 + \tau_1 h) & 0 < \tau_i < 1 \\ R^{(M)} &= \frac{h^3}{24} f''(x_0 + \tau_2 h) & i = 1, 2 \end{aligned} \right\} \dots (13).$$

So wie man die Simpsonsche Regel als Mittelwert aus der Trapez- und Maclaurinschen Regel herleiten kann, so sollen auch hier beide Verfahren gleichzeitig angewandt und ein Mittelwert so bestimmt werden, daß der Fehler möglichst klein wird.

Für die Schrittweite $2h$ gilt:

$$\begin{aligned} g_{k+2}^{(S)} &= g_k^{(M)} + (f_{k+2} + f_k) \tan h, \\ g_{k+2}^{(T)} &= g_k^{(M)} + 2f_{k+1} \sin h, \end{aligned}$$

dabei gilt der obere Index (S) für Punkte nach dem Sehnenverfahren, (T) für Punkte nach dem Tangentenverfahren und (M) für Punkte, die gemittelt worden sind. Analog dem Vorgehen bei der Simpsonschen Regel bildet man den Mittelwert:

$$g_{k+2}^{(M)} = \frac{1}{3} (g_{k+2}^{(S)} + 2g_{k+2}^{(T)}) \dots (14),$$

oder

$$\int_{x_k}^{x_{k+2h}} f(x) dx = g_{k+2}^{(M)} - g_k^{(M)} + R = \frac{1}{3} [(f_k + f_{k+2}) \tan h + 4f_{k+1} \sin h] + R \dots (14*).$$

Zur Bestimmung des Restes R werden die einzelnen Ausdrücke in (14*) in Taylorsche Reihen nach Potenzen von h entwickelt. Man erhält:

$$\begin{aligned} R &= J^{(M)} - J = \frac{h^5}{90} [f_k^{IV} + 10f_k'' + 9f_k] + \dots, \\ |R| &\leq \frac{h^5}{90} |f^{IV}(\xi) + 10f''(\xi) + 9f(\xi)|_{\max}. \end{aligned}$$

¹⁾ In der modifizierten Form nach Gl. (4).

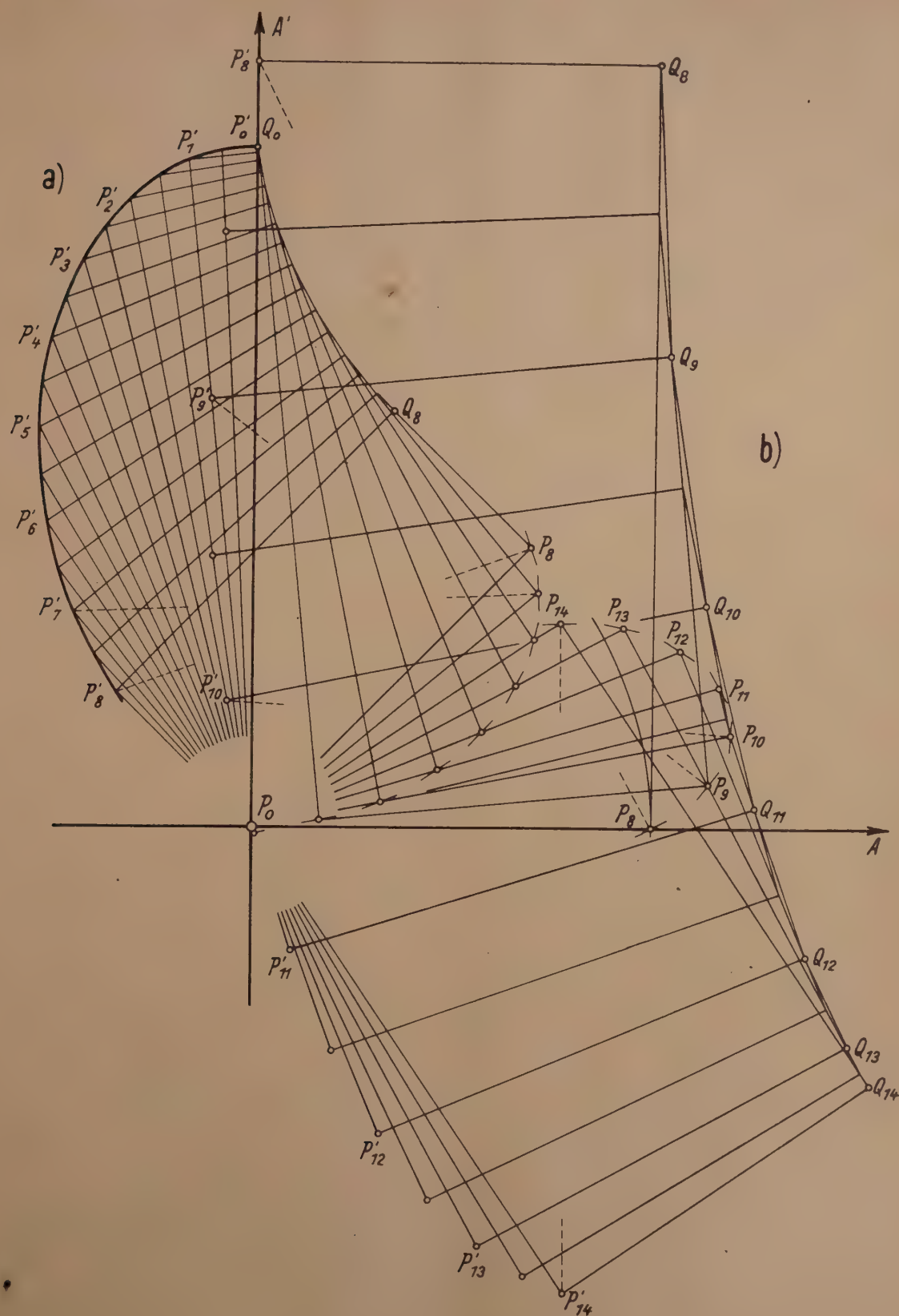


Bild 7. Beispiel $Si\ x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_x^{x/3} \frac{\sin 3t}{t} dt$
a) $0 \leq x \leq 2,4$, b) $2,4 \leq x \leq 4,2$

Der Ausdruck in der Klammer ist dabei an einer Stelle ξ innerhalb des Integrationsintervalles zu wählen. Das Ergebnis läßt sich zusammenfassen in den

Satz 10:

Bei der graphischen Integration über ein Intervall $2h$ von x_k bis x_{k+2} findet man für die Linienbilder durch das Sehnenverfahren den Punkt $P_{k+2}^{(S)}$, durch das Tangentenverfahren den Punkt $P_{k+2}^{(T)}$. Teilt man die Strecke $P_{k+2}^{(S)} P_{k+2}^{(T)}$ innerlich im Verhältnis 2:1, erhält man den neuen Näherungswert $P_{k+2}^{(M)}$, der ein Analogon zur Integration nach der Simpsonschen Regel darstellt mit dem Restglied

$$|R| \leq \frac{h^5}{90} |f^{IV}(\xi) + 10f''(\xi) + 9f(\xi)|_{\max} \dots \dots \dots (15).$$

Bei Anwendung der Grammelschen Verfahren muß man allerdings wegen der reziproken Funktionswerte die Mittelwerte numerisch bilden.

Beispiel (Bild 7): Das Sehnen-Tangenten-Verfahren soll für die Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

angewandt werden und zwar für einen Bereich $0 \leq x \leq \pi$, also

$$Si x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad Si \pi = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt,$$

der sog. Integral-Sinus. Eine leichte Umformung ergibt:

$$Si x = \int_0^{x/3} \frac{\sin 3t}{t} dt, \quad Si \pi = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 3t}{t} dt.$$

Gewählt wurde als Schrittweite $\varepsilon = 0,1$. Die Wertetabelle kann ohne weiteres berechnet und die Polare gezeichnet werden. Im Original wurden a) für $0 \leq \frac{x}{3} \leq 0,8$ die Einheit $e_1 = 50$ mm und b) für $0,8 \leq \frac{x}{3} \leq 1,2$ $e_2 = 200$ mm gewählt. Für b) wurde die Polare um $0,8$ gedreht und der Anfangspunkt der Integration beliebig gewählt (Verkleinerung im Bild 7 etwa $\frac{3}{4}$). Man liest aus Bild 7 ab:

$$Si 2,4 = 1,752, \quad Si \pi = 1,752 + 0,100 = 1,852.$$

Diese Werte stimmen mit den exakten Werten [4]

$$Si 2,4 = 1,7525 \quad \text{und} \quad Si \pi = 1,8519$$

gut überein ($Si \pi$ durch quadratische Interpolation aus den benachbarten Werten). Man sieht an dem Beispiel auch den Satz 5 bestätigt.

2.5. Das Sehnen-Tangenten-Verfahren für Linienbilder überein k -fach unterteiltes Intervall (Bild 8)

Ein Integral

$$\int_{x_0}^{x_0+k h} f(x) dx$$

soll näherungsweise graphisch ausgewertet werden in den folgenden zwei Schritten:

1. Schritt: k -seitiges Sehnenpolygon:

Nach Gl. (7) gilt

$$g_k - g_0 = (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{k-1} + f_k) \operatorname{tg} \frac{h}{2} \dots \dots \dots (16).$$

2. Schritt: Polygonzug, bestehend aus dem Tangentenstück im Ausgangspunkt, $(k-2)$ -seitiges Sehnenpolygon und Tangentenstück im Endpunkt:

Nach den Gl. (7) und (12) gilt:

$$g_1 = g_0 \frac{1}{\cos h} + f_1 \operatorname{tg} h,$$

$$g_{k-1} = g_1 + (f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{k-1} + f_{k-2}) \operatorname{tg} \frac{h}{2} \cos h,$$

$$g_k = g_{k-1} \cos h + f_{k-1} \sin h.$$

Daraus folgt:

$$g_k - g_0 = (f_1 + f_{k-1}) \sin h + (f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{k-2} + f_{k-1}) \operatorname{tg} \frac{h}{2} \cos h \quad (17).$$

Aus den beiden Näherungswerten für das Integral

$$J_1 = (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{k-1} + f_k) \operatorname{tg} \frac{h}{2} \quad (16*),$$

$$J_2 = (f_1 + f_{k-1}) \sin h + (f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{k-2} + f_{k-1}) \operatorname{tg} \frac{h}{2} \cos h \quad (17*).$$

soll nun durch geeignete Mittelwertbildung

$$\bar{J} = tJ_1 + (1-t)J_2 \quad (18).$$

eine Annäherung möglichst hoher Ordnung in h erreicht werden. Die Taylorsche Reihen für den exakten Wert J und für J_1 und J_2 stimmen in den ersten beiden Gliedern, d. h. bis h^2 , überein

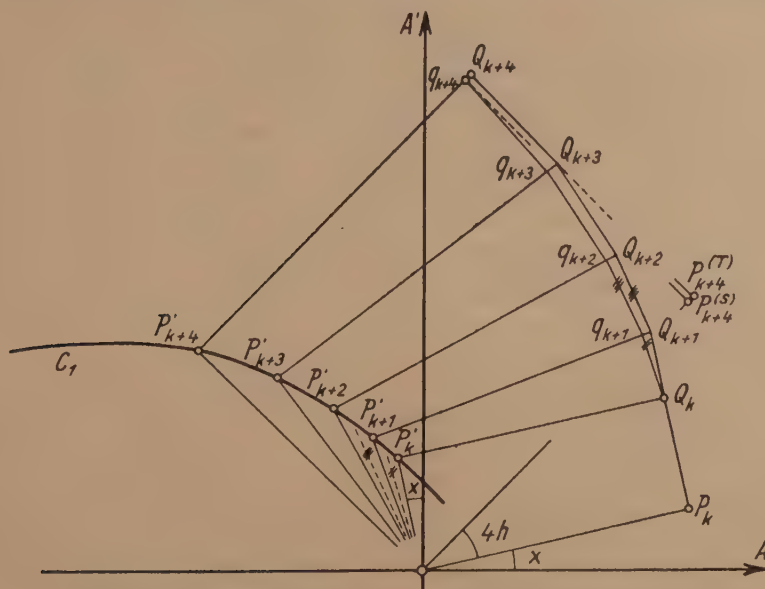


Bild 8. Sehnen-Tangenten-Verfahren für k -fach unterteiltes Intervall ($k=4$)

Soll in (18) auch der Koeffizient von h^3 für \bar{J} mit dem von J übereinstimmen, so muß man wählen

$$t = \frac{5k-6}{6(k-1)} \quad (19).$$

Mit diesem Wert t hat man aber zugleich erreicht, daß auch der Koeffizient von h^4 aus \bar{J} mit dem von J übereinstimmt, und das Restglied lautet:

$$R^{(k)} \leq \frac{kh^5}{720} |(5k-6)f^{IV} + 5kf'' + 6f|_{\max} \quad (20).$$

Satz 11:

Bildet man aus dem Näherungswert J_1 des Sehnenpolygons und dem Näherungspolygon J_2 des Sehnen-Tangentenpolygons den Mittelwert

$$\bar{J} = tJ_1 + (1-t)J_2$$

mit

$$t = \frac{5k-6}{6(k-1)},$$

so ist das Restglied von 5. Ordnung in h [Gl. (20)].

Tabelle der Koeffizienten t und $1-t$:

Tabelle 1

k	2	3	4	5	6
t	2/3	3/4	7/9	19/24	4/5
$1-t$	1/3	1/4	2/9	5/24	1/5

2.6. Formeln für ein numerisches Integrationsverfahren

Ersetzt man in (16*) und (17*) die trigonometrischen Funktionen durch das erste Glied ihrer Taylorreihen, also

$$\operatorname{tg} \frac{h}{2} \rightarrow \frac{h}{2}, \quad \sin h \rightarrow h, \quad \cos h \rightarrow 1,$$

so findet man folgende Näherungsformeln

$$\left. \begin{aligned} J_1^* &= \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{k-1} + f_k), \\ J^* &= h(f_1 + f_{k-1}) + \frac{h}{2} (f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{k-2} + f_{k-1}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21).$$

Entsprechend Gl. (18) wird der Mittelwert

$$\bar{J}^* = t J_1^* + (1-t) J_{k-1}^* \dots \dots \dots (22)$$

gebildet. Durch eine Rechnung, die der des Abschn. 2,5 sehr ähnlich ist, findet man denselben Wert für t [Gl. (19)]:

$$t = \frac{5k-6}{6(k-1)}$$

und es lautet die allgemeine Näherungsformel

$$\bar{J}^* = \frac{h}{12(k-1)} \left\{ (5k-6)(f_0 + f_k) + (13k-12)(f_1 + f_{k-1}) + 12(k-1)(f_2 + \cdots + f_{k-2}) \right\} \dots \dots \dots (23)$$

mit dem Restglied

$$R_{(k)}^* \leq \frac{k(5k-6)}{6!} h^5 |f^{IV}|_{\max} \dots \dots \dots (24).$$

Die nachfolgende Tabelle 2 enthält die vollständigen Formeln für $1 \leq k \leq 6$:

k	J_1^*	J_{k-1}^*	$\bar{J}^* = t J_1^* + (1-t) J_{k-1}^*$	$R_{(k)}^*$
1	$\frac{h}{2} (f_0 + f_1)$	$h f_0$	—	—
2	$\frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + f_2)$	$2 h f_1$	$\frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)$	$\frac{h^5}{90} f^{IV} $
3	$\frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3)$	$\frac{3}{2} h (f_1 + f_2)$	$\frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	$\frac{3h^5}{80} f^{IV} $
4	$\frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$	$\frac{h}{2} (3f_1 + 2f_2 + 3f_3)$	$\frac{h}{18} (7f_0 + 20f_1 + 18f_2 + 20f_3 + 7f_4)$	$\frac{7h^5}{90} f^{IV} $
5	$\frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + f_5)$	$\frac{h}{2} (3f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 3f_4)$	$\frac{h}{48} [19f_0 + 53f_1 + 48(f_2 + f_3) + 53f_4 + 19f_5]$	$\frac{19h^5}{144} f^{IV} $
6	$\frac{h}{2} [f_0 + 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5) + f_6]$	$\frac{h}{2} [3f_1 + 2(f_2 + f_3 + f_4) + 3f_5]$	$\frac{h}{18} [4f_0 + 11f_1 + 10(f_2 + f_3 + f_4) + 11f_5 + 4f_6]$	$\frac{h^5}{5} f^{IV} $

Diese Formeln enthalten für $k=2$ die Simpsonsche Regel und für $k=3$ eine nach Newton benannte Formel [5].

Schrifttum

- [1] E. Meißner: Graphische Analysis vermittle Linienbilder einer Funktion. Zürich 1932 (Sonderabdruck aus der „Schweiz. Bau-Ztg.“.)
- [2] R. Grammel: Ein Gegenstück zum Meißnerschen Verfahren der graphischen Analysis. Ingenieur-Arch. 10 (1939), S. 395–411.
- [3] Zu den Arbeiten 1 und 2 siehe auch:
E. Kamke: Differentialgleichungen und Lösungsmethoden. Bd. 1. Leipzig 1944. 3. Aufl. S. 171–172.
- [4] Jahnke-Emde: Tafeln der höheren Funktionen. 4. Auflage. S. 6–9. Leipzig 1948.
- [5] G. Kowalewski: Interpolation und genäherte Quadratur S. 60. Leipzig 1932. (Dort „Newtonsche Lieblingsformel“ genannt!)

Eingegangen 19. 6. 1950.

Berechnung der turbulenten Strömung im Rohr auf der Grundlage der Mischungsweghypothese

Von W. Szablewski in Berlin

Die Differentialgleichung der turbulenten Rohrströmung mit dem Prandtl'schen Schubspannungsansatz wird von der Wand her in zwei Schritten integriert. Für den übrigen Bereich der Rohrströmung wird die erhaltene Lösung als Approximation benutzt. Durch passende Wahl der empirischen Koeffizienten der Theorie erhält man gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

The differential equation of the turbulent pipe flow is integrated, by use of Prandtl's relation for the shearing stresses, in two steps starting from the wall of the pipe. The solution obtained is taken as an approximation for the remaining part of the pipe flow. Good conformity with the experimental dates is reached by appropriate values of the empirical coefficients occurring in the theory.

A l'aide de la relation de Prandtl pour l'effort de cisaillement l'équation différentielle de l'écoulement turbulent dans un tuyau est intégrée en deux pas partant de la paroi. Pour le reste de l'écoulement dans le tuyau la solution obtenue est employée comme approximation. Si les coefficients de la théorie sont convenablement choisis, on obtient une concordance satisfaisante avec l'expérience.

Дифференциальное уравнение вихревого потока в трубах интегрируется от стенки труб, при чем для вихревых сдвигающих напряжений принимается формула Прандтля. Полученное решение используется в качестве приближенной формулы для области потока, на которую не распространялось интегрирование уравнения. Путем подходящего подбора эмпирических коэффициентов в теоретической формуле достигается удовлетворительное совпадение с данными опыта.

I. Bezeichnungen

u, v Geschwindigkeitskomponenten.	τ Schubspannung.
ϱ Dichte.	τ_0 Wandschubspannung.
μ Zähigkeit.	
$\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ Kinematische Zähigkeit.	$\lambda = -\frac{dp}{dx} \frac{1}{\varrho} \frac{d}{2u_1^2}$
p Druck.	$\bar{\lambda} = -\frac{dp}{dx} \frac{1}{\varrho} \frac{d}{2w^2}$
x, r Zylinderkoordinaten.	} Widerstandsziffern.
r_0 Rohrhalmmesser.	
d Rohrdurchmesser.	
$y = r_0 - r$ Wandabstand.	$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$ Sog. Schubspannungsgeschwindigkeit.
$\eta = 1 - \frac{y}{r_0}$ Dimensionsloser Wandabstand.	$c_1 = \frac{\tau_0}{\varrho u_1^2}$ Dimensionslose Ziffer der Wandschubspannung.
l Prandtl'scher Mischungsweg.	$v_* y$ Dimensionsloser Wandabstand.
κ, μ Koeffizienten der Mischungswegverteilung $\frac{l}{r_0} = \kappa \frac{y}{r_0} + \mu \left(\frac{y}{r_0}\right)^2 + \dots$	δ_0 Dicke der laminaren Unterschicht.
u_1 Geschwindigkeit in Rohrachse.	$\frac{v_* \delta_0}{\nu}$ Dimensionslose Dicke der laminaren Unterschicht.
w Mittlere Durchflußgeschwindigkeit.	
$Re = \frac{u_1 d}{\nu}$	} Reynoldssche Zahlen.
$Re = \frac{wd}{\nu}$	

II. Einleitung

Im stationären Fall stellt die turbulente Rohrströmung (zusammen mit dem zweidimensionalen Analogon der parallelen Kanalströmung) im voll ausgebildeten Zustand wegen des Fortfalls von Trägheitswirkungen das einfachste Modell einer turbulenten Strömung dar. Die Differentialgleichung der Bewegung lautet in Zylinderkoordinaten, wenn wir den rotationssymmetrischen Charakter der Strömung beachten,

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau) = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

(x Koordinate längs Rohrachse, r Abstand von Rohrachse).

Hierbei ist

$$\tau = \tau_{\text{lam.}} + \tau_{\text{turb.}}$$

Zu der laminaren Schubspannung

$$\tau_{lam.} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} \dots \dots \dots (2a).$$

(y = r₀ - r Abstand von der Wand)

tritt noch eine scheinbare Schubspannung, die durch den turbulenten Mischungsvorgang erzeugt wird. Wir legen unserer Berechnung den bekannten Prandtlschen Ansatz [1]

$$\tau_{turb.} = \varrho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \dots \dots \dots (2b)$$

für die turbulente Schubspannung zugrunde. (Das Überstreichen deutet dabei an, daß es sich um die zeitlichen Mittelwerte einer stationären turbulenten Strömung handelt. Im folgenden werden wir die Querstriche fortlassen.)

Hier bedeutet *l* den sog. Prandtlschen Mischungsweg, der die Vorstellung fixiert, daß der Vorgang der turbulenten Vermischung durch sog. Turbulenzballen mit einem mittleren Mischungsweg erzeugt wird. Die Verteilung des Mischungsweges *l* über der Grenzschichtdicke, also die funktionale Abhängigkeit *l* von *y*, bildet das zentrale Problem der Prandtlschen Theorie. Bisher existieren nur einige empirische Aussagen, die die Analyse experimentell ermittelter Geschwindigkeitsverteilungen an Hand des Schubspannungsansatzes ergibt. Hier sind vor allem die Messungen von Nikuradse [2] zu nennen. Es zeigt sich dabei erwartungsgemäß eine Abhängigkeit des Mischungsweges von der Reynoldsschen Zahl des Strömungsvorganges, die allerdings für größere Re-Zahlen sehr gering wird.

Für die unmittelbare Wandnähe hat Prandtl [3] aus dimensionsanalytischen Gründen den Ansatz

$$l = \kappa y \dots \dots \dots (3)$$

gebildet und aus ihm für einen gewissen wandnahen Bereich, der charakterisiert ist durch die Annahme einer konstanten Schubspannung und die Vernachlässigung der laminaren Reibung, unter Zuhilfenahme dimensionsanalytischer Überlegungen das bekannte logarithmische Verteilungsgesetz der Geschwindigkeit für turbulente Rohrströmungen erschlossen¹⁾. Diese Formel gilt allerdings, ihrer Herleitung gemäß, nicht bis zur Wand, wo sie eine logarithmische Singularität besitzt. Ferner treten nach Rohrmitte zu gewisse Abweichungen auf, die für die Darstellung eine Modifikation der im logarithmischen Verteilungsgesetz auftretenden empirischen Koeffizienten erfordern.

In der folgenden Untersuchung werden wir eine Integration der Differentialgleichung (1) „von der Wand her“ vornehmen. Genauer gesprochen, werden wir die Integration über die laminare Unterschicht, das sich anschließende Gebiet gleicher Größenordnung von laminarer und turbulenter Reibung bis in das Gebiet überwiegend turbulenter Reibung hinein erstrecken. Dabei werden wir uns für das letztere Gebiet auf einen Bereich beschränken, der definiert ist durch

$$\frac{l}{r_0} \approx \kappa \frac{y}{r_0} + \mu \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \dots \dots \dots (4)$$

(≈ wenig verschieden von),

für den also die Mischungswegverteilung noch durch die beiden ersten Glieder der Taylor-Entwicklung beschrieben wird. Insofern werden wir uns also auf mehr oder minder größere Wandnähe bei der Integration beschränken. Es dürfte jedoch keine Schwierigkeiten bereiten, unter Inkaufnahme eines größeren Rechenaufwandes weitere Glieder der Taylor-Entwicklung für *l/r*₀ zu berücksichtigen und so zu größeren Wandabständen vorzudringen. Die derart gewonnenen Funktionen, die innerhalb des definierten Bereichs die strenge Lösung darstellen, ergeben nach den bisherigen Untersuchungen in dem an den Gültigkeitsbereich anschließenden Bereich eine gute Approximation der Geschwindigkeitsverteilung.

Zur weiteren Berechnung der Strömungsvorgänge gehen wir dann so vor, daß wir die berechneten Funktionen, die natürlich die Randbedingungen an der Wand erfüllen, der äußeren Randbedingung *u* = *u*₁ (*u*₁ Geschwindigkeit in Rohrachse) für *y* = *r*₀ unterwerfen.

Die empirischen Koeffizienten, die im analytischen Apparat auftreten, sind die Koeffizienten der Mischungswegverteilung entspr. unserem Ansatz (4). Des weiteren tritt als empirischer Koeffizient in den Rechnungen die dimensionslos gemachte Dicke *δ*₀ der laminaren Unterschicht auf:

$$\frac{v_* \delta_0}{r}, \quad \text{wobei } v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$$

¹⁾ Vgl. L. Prandtl, Führer durch die Strömungslehre (1942), S. 112–113.

die sog. Schubspannungsgeschwindigkeit ist. Leider besitzen diese Koeffizienten keinen universellen Charakter. Wie Prandtl [3] dargelegt hat, muß man aus dimensionsanalytischen Gründen annehmen, daß in Wandnähe die Länge l außer von der Länge y (Wandabstand) noch von der Länge v/v_* , die den Zähigkeitseinfluß zum Ausdruck bringt, abhängig ist. Immerhin läßt sich für große Re -Zahlen nach den Messungen Nikuradses [2] die Aussage machen, daß der Zähigkeitseinfluß sehr gering wird. Insofern wir noch keine ausreichenden Kenntnisse über die erwähnten Abhängigkeiten besitzen, müssen wir α , μ und $\frac{v_* \delta_0}{v}$ an Hand der Meßergebnisse bestimmen.

III. Die turbulente Rohrströmung

Die turbulente Rohrströmung ist das Objekt zahlreicher experimenteller Untersuchungen gewesen. Wir werden uns auf die besonders ausgedehnten Messungen von Nikuradse [2] stützen.

Integration von (1) ergibt

$$\tau = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \cdot r \quad \dots \quad (5),$$

die Schubspannung ist also linear über dem Radius verteilt.

Transformieren wir auf $\eta = 1 - \frac{r}{r_0}$ (r_0 Rohrradius), so erhalten wir mit (2a) und (2b)

$$\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \frac{r_0}{\rho u_1^2} (1 - \eta) + \frac{2}{Re} \frac{d \frac{u}{u_1}}{d \eta} + \left(\frac{l}{r_0} \right)^2 \left(\frac{d \frac{u}{u_1}}{d \eta} \right)^2 = 0,$$

wo u_1 Geschwindigkeit in Rohrmitte, $Re = \frac{u_1 d}{\nu}$ (d Rohrdurchmesser).

Führen wir die Widerstandsziffer

$$\lambda = -\frac{dp}{dx} \frac{1}{\rho} \frac{d^2}{2 u_1^2}$$

ein, so können wir auch schreiben

$$\left(\frac{l}{r_0} \right)^2 \left(\frac{d \frac{u}{u_1}}{d \eta} \right)^2 + \frac{2}{Re} \frac{d \frac{u}{u_1}}{d \eta} - \frac{\lambda}{8} (1 - \eta) = 0 \quad \dots \quad (6).$$

Auflösung nach $\frac{d \frac{u}{u_1}}{d \eta}$ ergibt

$$\frac{d \frac{u}{u_1}}{d \eta} = -\frac{1}{Re} \cdot \frac{1}{\left(\frac{l}{r_0} \right)^2} + \frac{1}{Re} \left(\frac{l}{r_0} \right)^2 \sqrt{1 + Re^2 \frac{\lambda}{8} \left(\frac{l}{r_0} \right)^2 (1 - \eta)}$$

bzw.

$$\frac{u}{u_1} = -\frac{1}{Re} \int \frac{1}{\left(\frac{l}{r_0} \right)^2} d\eta + \frac{1}{Re} \int \frac{\sqrt{1 + Re^2 \frac{\lambda}{8} \left(\frac{l}{r_0} \right)^2 (1 - \eta)}}{\left(\frac{l}{r_0} \right)^2} d\eta \quad \dots \quad (7).$$

Gl. (6) ergibt für die Wand

$$\left(\frac{d \frac{u}{u_1}}{d \eta} \right)_0 = \frac{Re \lambda}{16} \quad \dots \quad (8).$$

Führen wir die dimensionslose Ziffer der Wandschubspannung

$$c_1 = \frac{\tau_0}{\rho u_1^2}$$

²⁾ Gewöhnlich wird die Widerstandsziffer unter Zugrundelegung der mittleren Durchflußgeschwindigkeit w definiert. Die so definierte Widerstandsziffer werden wir im folgenden mit λ bezeichnen.

ein, so folgt für diese aus (8)

$$c_1 = \frac{\lambda}{8} \dots \dots \dots (9),$$

wie man sofort sieht, wenn man $\tau_0 = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_0$ beachtet.

Wir gehen nun an die Integration der Differentialgleichung heran.

Beschränken wir uns auf kleine η , d. h.

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{r_0} &\approx \kappa \eta \\ 1 - \eta &\approx 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

[letztere Einschränkung ist nach (5) äquivalent der Annahme einer konstanten Schubspannung], so haben wir nach (7)

$$\frac{u}{u_1} = -\frac{1}{Re} \int \frac{1}{\kappa^2 \eta^2} d\eta + \frac{1}{Re} \int \frac{1 + Re^2 \frac{\lambda}{8} \kappa^2 \eta^2}{\kappa^2 \eta^2} d\eta.$$

Hier läßt sich die Quadratur nach bekannten Methoden durchführen und ergibt

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{u_1} &= \frac{1}{\kappa^2} \frac{1}{Re} \frac{1}{\eta} \left(1 - \sqrt{1 + Re^2 \frac{\lambda}{8} \kappa^2 \eta^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \ln \left\{ Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \kappa \eta + \sqrt{1 + Re^2 \frac{\lambda}{8} \kappa^2 \eta^2} \right\} + \text{const} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11).$$

Setzt man die Integrationskonstante gleich Null, so erhält man $\frac{u}{u_1} = 0$ für $\eta = 0$. Die so bestimmte Funktion gibt jedoch den experimentell ermittelten Geschwindigkeitsverlauf nur unbefriedigend wieder. Die Ursache ist darin zu finden, daß die mathematische Formulierung die Existenz der laminaren Unterschicht nicht berücksichtigt.

Infolge der Haftbedingung besitzen auch die turbulenten Grenzschichtströmungen eine, wenn auch sehr dünne, der Wand anliegende laminare Strömungszone. Diese laminare Unterschicht der Strömung ist als frei von der turbulenten Vermischung anzusehen. Der Vorgang der turbulenten Vermischung setzt vielmehr erst am Rande derselben ein. Mathematisch heißt das, daß unser Ansatz (10)

$$\frac{l}{r_0} = \kappa \eta$$

zu modifizieren ist in

$$\frac{l}{r_0} = \kappa (\eta - \eta_0)^3 \dots \dots \dots (12),$$

wo η_0 die dimensionslose Dicke der laminaren Unterschicht ist. (η_0 ist allerdings, wie wir noch sehen werden, eine gegenüber 1 sehr kleine Zahl, so daß man für nicht allzu kleine η unbeschadet $\eta - \eta_0 \approx \eta$ setzen kann.)

Entsprechend haben wir in (11) η durch $\eta - \eta_0$ zu ersetzen. Die Integrationskonstante ist nunmehr so zu bestimmen, daß sie die Geschwindigkeit am Rande der laminaren Unterschicht

ergibt! Nun hatten wir bereits in (8) gezeigt, daß an der Wand $\left(\frac{du}{dy} \right)_0 = \frac{Re \lambda}{16}$. Mit der sehr kleinen Dicke η_0 der laminaren Unterschicht erhalten wir demgemäß

$$\frac{u}{u_1} = \frac{Re \lambda}{16} \eta_0 \quad \text{für Rand der laminaren Unterschicht} \dots \dots \dots (13).$$

³⁾ Anmerkung bei der Korrektur: Wie aus einer vor kurzem erschienenen Arbeit von J. Rotta, Ing.-Archiv XVIII (1950), S. 277 ersichtlich, ist der Ansatz (12) bereits in einer Arbeit von H. B. Squire, Phil. Mag. (7) 39 (1948), S. 7 enthalten. Die in der vorliegenden Arbeit enthaltenen Resultate hat der Verf. bereits im Jahre 1948 Herrn Prof. L. Prandtl schriftlich mitgeteilt.

Unser Integrationsergebnis lautet mithin

$$\frac{u}{u_1} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{1}{Re} \frac{1}{\eta - \eta_0} \left(1 - \sqrt{1 + Re^2 \frac{\lambda}{8} \kappa^2 (\eta - \eta_0)^2} \right) + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \ln \left[Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \kappa (\eta - \eta_0) + \sqrt{1 + Re^2 \frac{\lambda}{8} \kappa^2 (\eta - \eta_0)^2} \right] + \frac{Re \lambda}{16} \eta_0 \right] \quad (11).$$

$$\text{für } 0 \leq \eta - \eta_0 \leq 1, \quad \text{d. h. } \frac{l}{r_0} \approx \kappa (\eta - \eta_0), \quad 1 - \eta \approx 1$$

Wir wollen diese Verteilung nach dem Vorgang von Prandtl [4] auf die sog. Schubspannungsgeschwindigkeit $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ umschreiben. Diesen in der Theorie der turbulenten Strömungen viel gebrauchten Begriff hat Prandtl folgendermaßen eingeführt. Unter der Annahme einer im ganzen Gebiet konstanten Schubspannung erhält man aus dem Schubspannungsansatz $\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$:

$$l \frac{du}{dy} = \sqrt{\tau_0} = v_*.$$

Aus dimensionsanalytischen Überlegungen ergibt sich für wandnahe Punkte der Ansatz $l = \kappa y$. Das führt auf

$$v_* = \kappa y \frac{du}{dy}.$$

Integration ergibt

$$u = v_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln y + C \right).$$

Unter Heranziehung einer zweiten Länge $\frac{\nu}{v_*}$, die dem Einfluß der Zähigkeit auf l Rechnung trägt, erhält man, indem man C durch $C_1 - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\nu}{v_*}$ ersetzt, die dimensionsanalytisch richtige Gleichung

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} + C_1 \quad (15).$$

Das ist das bekannte logarithmische Verteilungsgesetz der Geschwindigkeit für turbulente Rohrströmungen. Dabei sind κ und C_1 empirische Konstanten. Obwohl nur für wandnahe Punkte abgeleitet hat es sich gezeigt, daß durch dieses Verteilungsgesetz die Geschwindigkeit über dem ganzen Rohrradius in guter Näherung beschrieben wird.

Wir rechnen nunmehr unsere Formel (14) auf die Schubspannungsgeschwindigkeit v_* um. Für die dimensionslose Geschwindigkeit u/v_* erhält man nach (9)

$$\frac{u}{v_*} = \frac{u}{u_1} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{8}}} \quad (16).$$

Für den dimensionslosen Wandabstand $\frac{v_* y}{\nu}$:

$$\frac{v_* y}{\nu} = \frac{v_*}{u_1} \cdot \frac{u_1 d}{\nu} \cdot \frac{y}{d} = Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \frac{\eta}{2} \quad (17).$$

So erhalten wir — mit der Dicke δ_0 der laminaren Unterschicht —

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{1 - \sqrt{1 + 4 \kappa^2 \left[\frac{v_* y}{\nu} - \frac{v_* \delta_0}{\nu} \right]^2}}{2 \left[\frac{v_* y}{\nu} - \frac{v_* \delta_0}{\nu} \right]} + \frac{1}{\kappa} \ln \left\{ 2 \kappa \left[\frac{v_* y}{\nu} - \frac{v_* \delta_0}{\nu} \right] + \sqrt{1 + 4 \kappa^2 \left[\frac{v_* y}{\nu} - \frac{v_* \delta_0}{\nu} \right]^2} \right\} + \frac{v_* \delta_0}{\nu} \quad (18)$$

für $0 \leq \frac{v_* y}{\nu} - \frac{v_* \delta_0}{\nu} \leq \frac{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}}{2}$.

Um einen Begriff von den Größenordnungen zu geben, sei vermerkt, daß für ein mittleres $\bar{Re} = \frac{u d}{\nu} = 240000$ $Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \approx 10000$ (siehe z. B. L. Prandtl [5]). Bemerkung: $Re \sqrt{\lambda} = \bar{Re} \sqrt{\lambda}$, siehe (38).

Für die laminare Unterschicht selbst haben wir, wie schon dargelegt,

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{u}{u_1} = \frac{Re \lambda}{16} \eta & \text{für } \eta \leq \eta_0, \\ \text{bzw.} & \\ \frac{u}{v_*} = \frac{v_* y}{\nu} & \text{für } \frac{v_* y}{\nu} \leq \frac{v_* \delta_0}{\nu} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (19).$$

Die Gl. (14) bzw. (15) sind für nicht allzu wandnahe Punkte einer erheblichen Vereinfachung fähig. Für $\eta - \eta_0 \gg \frac{1}{\kappa} \frac{1}{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}}$ bzw. $\frac{v_* y}{\nu} - \frac{v_* \delta_0}{\nu} \gg \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa}$ können wir setzen

$$\sqrt{1 + Re^2 \frac{\lambda}{8} \kappa^2 (\eta - \eta_0)^2} \approx Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \kappa (\eta - \eta_0)$$

bzw.

$$\sqrt{1 + 4 \kappa^2 \left[\frac{v_* y}{\nu} - \frac{v_* \delta_0}{\nu} \right]^2} \approx 2 \kappa \left[\frac{v_* y}{\nu} - \frac{v_* \delta_0}{\nu} \right].$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_1} = -\frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \ln \left\{ 2 \kappa Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \eta \right\} + \frac{Re \lambda}{16} \eta_0 \dots \dots \dots (20) \\ \text{für } \frac{1}{\kappa Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}} \ll \eta \ll 1; \end{aligned}$$

dabei haben wir $\eta - \eta_0$ gleich durch η ersetzt, was an dieser Stelle auf Grund der Einschränkung $\eta - \eta_0 \gg \frac{1}{\kappa Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}}$ gerechtfertigt ist, wie wir noch zeigen werden. Entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} + \left[\frac{v_* \delta_0}{\nu} - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln 4 \kappa \right] \dots \dots \dots (21) \\ \text{für } \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa} \ll \frac{v_* y}{\nu} \ll \frac{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}}{2}. \end{aligned}$$

Damit sind wir aber wieder auf das logarithmische Verteilungsgesetz der Geschwindigkeit entsprechend (15) gestoßen! Wir haben gleichzeitig eine Analyse dieser bekannten Formel auf der Grundlage der Mischungsweghypothese erhalten.

Als empirische Koeffizienten treten hier auf der Koeffizient κ der Mischungswegverteilung und die dimensionslose Dicke $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$ der laminaren Unterschicht. Im allgemeinen werden diese Größen (s. Einleitung) kennzahlabhängig sein. Für große Reynoldssche Zahlen wird allerdings der Einfluß der Zähigkeit sehr gering. Wir ziehen zum Vergleich das von Nikuradse [2] experimentell für wandnahe Punkte ermittelte logarithmische Verteilungsgesetz

$$\frac{u}{v_*} = 5,52 \log \frac{v_* y}{\nu} + 5,84 \dots \dots \dots (22)$$

heran. Man erhält in bekannter Weise

$$\frac{2,3}{\kappa} = 5,52 \quad \kappa = \underline{0,417} \dots \dots \dots (23).$$

Wir erhalten weiter $\frac{v_* \delta_0}{\nu} - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln 4 \kappa = 5,84$,

$$\frac{v_* \delta_0}{\nu} = \underline{7,01} \quad \text{bzw.} \quad \eta_0 = \frac{14,02}{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}} \dots \dots \dots (24).$$

Wie wir schon angegeben haben, ist für ein mittleres $Re = 240\,000$ $Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 10\,000$, was $\eta_0 = 0,0014$ ergibt. η_0 ist also gegenüber 1 eine sehr kleine Zahl, die laminare Unterschicht gegenüber der turbulenten Grenzschicht von sehr geringer Dicke. Aus dem angegebenen Wert von η_0 ergibt sich auch die Berechtigung der oben vollzogenen Vernachlässigung von η_0 gegenüber η , wenn wir die Forderung stellen $\eta - \eta_0 \gg \frac{1}{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}}$.

Mit den so bestimmten Konstanten $\kappa = 0,417$ und $\frac{v_* \delta_0}{\nu} = 7,01$ haben wir unsere Verteilungsfunktion (18) berechnet und in Bild 1 mit der von Reichardt [6] und Nikuradse [2] gemessenen Geschwindigkeitsverteilung verglichen. Innerhalb der laminaren Unterschicht, die bis $\frac{v_* \delta_0}{\nu} = 7,01$ reicht, haben wir nach (19)

$$\frac{u}{v_*} = \frac{v_* y}{\nu},$$

(18) liefert dann

$\frac{v_* y}{\nu}$	$\lg \left(\frac{v_* y}{\nu} \right)$	$\frac{u}{v_*}$
10	1	9,324
15	1,176	11,156
20	1,301	12,180
30	1,477	13,447
100	2	16,715
200	2,477	19,466

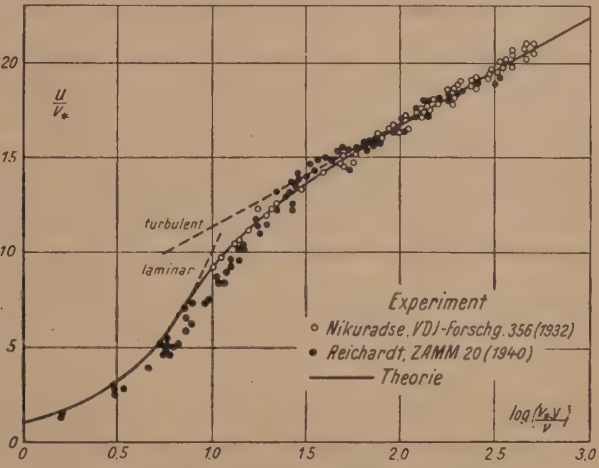


Bild 1. Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe

Während die theoretische Kurve mit der von Nikuradse gemessenen Verteilung sehr gut übereinstimmt, weicht demgegenüber die von Reichardt gemessene Verteilung, die in einem flach rechtwinkligen Kanal aufgenommen wurde, etwas ab. Wir bemerken zum Erscheinungsbild: Man kann hier drei Bereiche unterscheiden. Zunächst die laminare Unterschicht mit rein laminarer Reibung. Anschließend daran einen Übergangsbereich, der dadurch gekennzeichnet ist, daß laminare und turbulente Reibung von gleicher Größenordnung sind, und der in den Bereich mündet, in dem gegenüber der turbulenten Reibung die laminare Reibung keine Rolle mehr spielt. In diesem letzteren Bereich wird die Geschwindigkeitsverteilung bei der logarithmischen Auftragung durch eine Gerade dargestellt, deren Gleichung wir in (21) wiedergegeben haben. Gl. (21) ist identisch mit Gl. (20). Diese hat die Gestalt

$$\frac{u}{u_1} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \ln \eta + \text{const} \quad \dots \quad (26)$$

eine Gleichung, die man bei Vernachlässigung der laminaren Reibung auch sofort durch Integration der Differentialgleichung (6) erhält, wenn man in dieser setzt $\frac{b}{\tau_0} \approx \kappa \eta$, $1 - \eta \approx 1$. Wir geben noch die Dicken der unterschiedenen Bereiche an:

a) Laminare Unterschicht

$$0 \leq \frac{v_* y}{\nu} \leq 7 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq \eta \leq \frac{11}{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}}.$$

Für mittlere Reynoldssche Zahlen ist, wie oben bemerkt,

$$Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \approx 10\,000, \quad \text{also} \quad 0 \leq \eta \leq 0,0014.$$

b) Der Bereich gleicher Größenordnung von laminarer und turbulenter Reibung erstreckt sich nach den Messungen (s. Bild 1) bis $\frac{v_* y}{\nu} \approx 50$. Wir hatten diese Grenze umschrieben durch $\frac{v_* y}{\nu} \gg \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa} \approx 1,2$. Wir haben also folgendes Intervall $7 \leq \frac{v_* y}{\nu} \leq 50$ bzw. $0,0014 \leq \eta \leq \frac{100}{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}}$.

Für mittlere Reynoldssche Zahlen ergibt das $0,0014 \leq \eta \leq 0,01$. Also auch der Übergangsbereich ist noch relativ sehr dünn.

c) Der Bereich der turbulenten Reibung erfüllt demnach das Intervall $\frac{100}{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}} \leq \eta \leq 1$;

für mittlere Re -Zahlen $0,01 \leq \eta \leq 1$. Er erfüllt also fast das ganze Intervall.

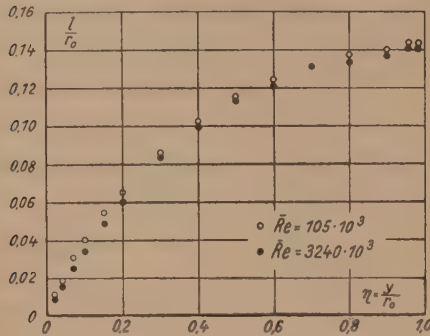


Bild 2. Mischungswegverteilung im Rohr

2. Unser bisheriger Integrationsprozeß erstreckte sich auf ein Gebiet, das, wie wir gesehen haben, bis in den Bereich der überwiegend turbulenten Reibung hineinreicht. Nach oben, also zum äußeren Rand der Grenzschicht hin, war das Gebiet beschränkt durch

$$\frac{l}{r_0} \approx \kappa \eta, \quad 1 - \eta \approx 1 \quad \dots \text{(siehe (10))}.$$

Wir gehen nun daran, die gefundene Lösung fortzusetzen, indem wir den Integrationsprozeß in ein Gebiet ausdehnen, das gekennzeichnet ist durch

$$\frac{l}{r_0} \approx \kappa \eta + \mu \eta^2 \quad \dots \dots \dots (27).$$

(Die oben genannte Einschränkung $1 - \eta \approx 1$ bzw. $\tau \approx \tau_0$ wird fallen gelassen.) Wir ziehen also das zweite Glied der Taylor-Entwicklung für l/r_0 in Betracht. Daß l/r_0 bei wachsender Entfernung von der Rohrwand nicht mehr durch $\kappa \eta$ beschrieben wird, ist aus den Messungen von Nikuradse [2] bekannt. Aus den gemessenen Schubspannungen und der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich nach dem Prandtlschen Schubspannungsansatz

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

die im Bild 2 wiedergegebene Verteilung des Mischungsweges für große Reynoldssche Zahlen. (Bild 2 nach Nikuradse [2].) Für größere Re -Zahlen ist die Mischungswegverteilung kennzahlunabhängig. Man kann aus dem Bild den Gültigkeitsbereich unserer Annahme $\frac{l}{r_0} \approx \kappa \eta$ abschätzen.

Bei der Integration handelt es sich, da wir bereits in den Bereich rein turbulenter Reibung gelangt sind, um die Fortsetzung von Gl. (20). Nach (6) erhalten wir bei Vernachlässigung der laminaren Reibung die Differentialgleichung

$$\left(\frac{l}{r_0} \right)^2 \left(\frac{d \frac{u}{u_1}}{d \eta} \right)^2 - \frac{\lambda}{8} (1 - \eta) = 0 \quad \dots \dots \dots (28),$$

die integriert

$$\frac{u}{u_1} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \int_{r_0}^{\eta} \frac{\sqrt{1-\eta}}{l} d\eta$$

ergibt.

$$\text{Mit } \frac{l}{r_0} \approx \kappa \eta + \mu \eta^2 \quad \text{folgt} \quad \frac{u}{u_1} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \int \frac{\sqrt{1-\eta}}{\kappa \eta + \mu \eta^2} d\eta.$$

Außer durch $\frac{l}{r_0} \approx \kappa \eta + \mu \eta^2$ beschränken wir unseren Bereich nach oben noch durch die Gültigkeit folgender Linearisierungen:

$$\sqrt{1-\eta} \approx 1 - \frac{1}{2} \eta, \quad \frac{1}{\kappa \eta + \mu \eta^2} \approx \frac{1}{\kappa} \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{\mu}{\kappa} \eta \right).$$

Die Integration ergibt dann bei Vernachlässigung höherer Potenzen von η

$$\frac{u}{u_1} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \left\{ \ln \eta - \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{\kappa} \right) \eta \right\} + \text{const} \quad \dots \dots \dots (29).$$

Gegenüber (20) haben wir also in Fortsetzung ein in η lineares Glied erhalten. Die Integrationskonstante ist bekannt: nach (20) ist

$$\text{const} = -\frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \ln \left(2 \kappa Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right) + \frac{Re \lambda}{16} \eta_0.$$

Man kann Gl. (29) natürlich auch erhalten, indem man in die Differentialgleichung (28) mit dem Ansatz

$$\frac{u}{u_1} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \{ \ln \eta - C \eta \} \quad \text{und} \quad \frac{l}{r_0} \approx \kappa \bar{\eta} + \mu \eta^2$$

eingeht. Man erhält dann

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{\lambda}{8} [\kappa^2 + \eta (-2 C \kappa^2 + 2 \kappa \mu) + \eta^2 (\dots) + \dots] - \frac{\lambda}{8} (1 - \eta) = 0,$$

was bei Vernachlässigung höherer Potenzen von η auf $C = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\kappa}$ führt.

In dieser Weise könnte man fortfahren. Wir begnügen uns jedoch mit diesem Schritt, wobei wir hoffen, daß die gewonnene Funktion auch außerhalb ihres Geltungsbereiches die Geschwindigkeitsverteilung gut approximieren wird.

Es handelt sich nun um die Bestimmung des Koeffizienten μ/κ . Während man den Koeffizienten κ verhältnismäßig einfach und sicher aus der Neigung der sich in der logarithmischen Auftragung für die turbulente Geschwindigkeitsverteilung der wandnahen Punkte ergebenden Geraden (21) bestimmen konnte, stößt man hier auf größere Schwierigkeiten. Schreibt man (29) wieder auf die Schubspannungsgeschwindigkeit v_* um, so erhält man

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} - \frac{2}{\kappa} \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\kappa} \frac{1}{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}} \frac{v_* y}{\nu} + \left[\frac{v_* \delta_0}{\nu} - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln 4 \kappa \right] \dots \dots (30).$$

Das zusätzliche, in $v_* y/\nu$ lineare, Glied besitzt also keinen universellen Charakter mehr. Es gibt bei der logarithmischen Auftragung die Abweichung der Tangente von der Geraden in erster Ordnung wieder.

Prandtl [7] hat für die in Bild 3 dargestellte Mischungswegverteilung die Interpolationsformel

$$\frac{l}{r_0} = 0,14 - 0,08 (1 - \eta)^2 - 0,06 (1 - \eta) \quad (31)$$

aufgestellt. Bzw.

$$\frac{l}{r_0} = 0,4 \eta - 0,44 \eta^2 + \dots \quad (32);$$

also

$$\kappa = 0,40, \quad \mu = -0,44$$

was $\frac{\mu}{\kappa} = -1,1$ ergibt. Wir werden die weiteren Berechnungen mit diesem Wert von μ/κ durchführen.

Wir haben Funktion (30) für eine verhältnismäßig kleine und eine große Reynoldssche Zahl berechnet:

$$\begin{aligned} \bar{Re} &= 105 \cdot 10^3 & \bar{\lambda} &= 0,0180 \\ \bar{Re} &= 3240 \cdot 10^3 & \bar{\lambda} &= 0,0096 \end{aligned}$$

(Widerstandsziffern nach Nikuradse)

$$[2)] \quad [Re \sqrt{\lambda} = \bar{Re} \sqrt{\bar{\lambda}}, \text{ siehe (38)}]$$

und in Bild 3 mit den Messungen von Nikuradse [2] verglichen. Der bekannten, bei größeren Werten von $\frac{v_* y}{\nu}$ auftretenden, Abweichung der Geschwindigkeitsverteilung vom logarithmischen

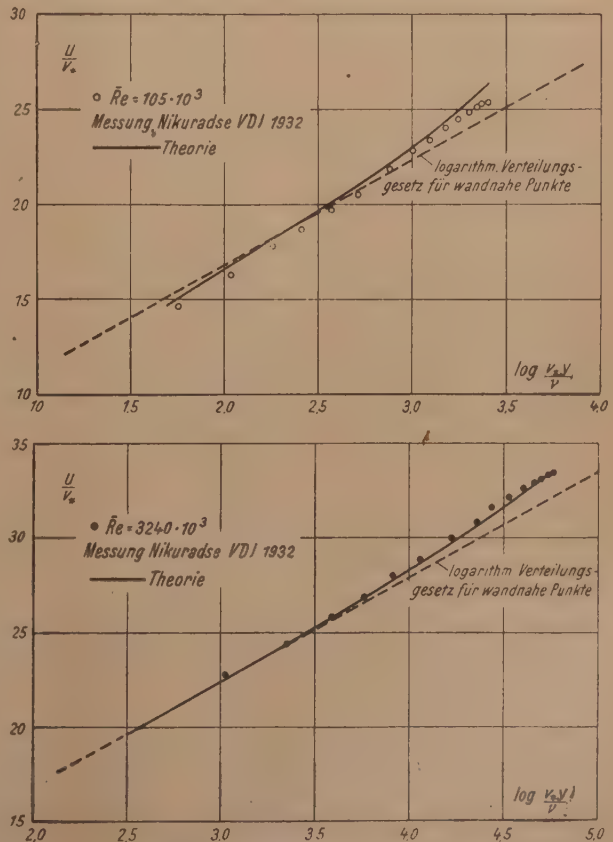


Bild 3. Geschwindigkeitsverteilung im Rohr

Verteilungsgesetz (21) bzw. (22) für wandnahe Punkte wird durch das zusätzliche, in $\frac{v_* y}{\nu}$ lineare, Glied gut Rechnung getragen.

3. Die Differentialgleichung (6) sowie die Lösungsfunktion enthalten als Parameter die Widerstandsziffer λ . Diese wird festgelegt durch die Randbedingung $\frac{u}{u_1} = 1$ für $\eta = 1$. Wir unterwerfen auch die von uns berechnete Funktion (29) dieser Randbedingung. Es ist klar, daß unsere Funktion, da sie ja außerhalb ihres Geltungsbereichs nur eine Approximation darstellt, dadurch auch innerhalb ihres Geltungsbereichs mit einem gewissen Fehler behaftet wird. Insofern wir (29) der genannten Randbedingung unterwerfen, ergibt sich eine neue Bestimmung der Integrationskonstanten derart, daß

$$\frac{u}{u_1} = 1 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \left\{ \ln \eta + \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{\kappa} \right) (1 - \eta) \right\} \dots \dots \dots (33).$$

Wäre (29) die exakte Lösung im ganzen Bereich, so würden die beiden Integrationskonstanten gleich zu setzen sein, was hier natürlich nur innerhalb einer gewissen Fehlergrenze möglich ist.

Bevor wir diese Verteilungsfunktion mit Meßwerten vergleichen, wollen wir noch die Widerstandsziffer, wie es üblich ist, auf die mittlere Durchflußgeschwindigkeit w beziehen. Für w haben wir die Definition

$$\pi r_0^2 \frac{w}{u_1} = \int_0^{r_0} 2 \pi r \frac{u}{u_1} dr$$

bzw. mit

$$\eta = 1 - \frac{r}{r_0} \quad \frac{w}{u_1} = 2 \int_0^1 \frac{u}{u_1} \eta d\eta.$$

Mit unserer Funktion (33) ergibt das

$$\frac{w}{u_1} = 1 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \left[-\frac{7}{6} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{\kappa} \right] \dots \dots \dots (34).$$

Die auf die mittlere Durchflußgeschwindigkeit w bezogene Widerstandsziffer $\bar{\lambda}$ steht mit der auf die Maximalgeschwindigkeit u_1 bezogenen Widerstandsziffer λ in folgendem Zusammenhang:

$$\bar{\lambda} w^2 = \lambda u_1^2;$$

es folgt

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{1}{\frac{w}{u_1}} \dots \dots \dots (35).$$

Beachtet man diese Beziehung, so erhält man für unsere Funktion (34) auch

$$\frac{w}{u_1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{8}} \left[-\frac{7}{6} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{\kappa} \right]} \dots \dots \dots (36)$$

und

$$\frac{u}{u_1} = 1 + \frac{\frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{8}}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{8}} \left[-\frac{7}{6} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{\kappa} \right]} \left\{ \ln \eta + \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{\kappa} \right) (1 - \eta) \right\} \dots \dots \dots (37).$$

Wir merken noch an

$$\left. \begin{aligned} Re &= \frac{u_1 d}{\nu}, & \bar{Re} &= \frac{w d}{\nu}; \\ & & Re \sqrt{\lambda} &= \bar{Re} \sqrt{\bar{\lambda}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38).$$

Wir haben die Verteilungsfunktion (37) für eine verhältnismäßig kleine und eine große Reynoldssche Zahl berechnet

$$\begin{aligned} \bar{Re} &= 105 \cdot 10^3 & \bar{\lambda} &= 0,0180 \\ \bar{Re} &= 3240 \cdot 10^3 & \bar{\lambda} &= 0,0096 \end{aligned}$$

(Widerstandsziffern $\bar{\lambda}$ nach Nikuradse [2].) Die Berechnung ergibt

u/u_1		
η	$\bar{Re} = 105 \cdot 10^3$	$\bar{Re} = 3240 \cdot 10^3$
0,01	0,515	0,626
0,1	0,735	0,796
0,3	0,849	0,884
0,5	0,908	0,929
0,7	0,950	0,961
0,9	0,985	0,988

In Bild 4 werden diese Verteilungsfunktionen mit den von Nikuradse [2] gemessenen verglichen. Die theoretischen Kurven liegen etwas zu tief; insbesondere für größere Werte von η . Dieser Umstand entspricht, daß wir für die mittlere Durchflußgeschwindigkeit nach (34)

$$w = u_1 - 4,55 v_* \quad (39)$$

erhalten, während Nikuradse [2] durch Auswertung der gemessenen Verteilungen

$$w = u_1 - 4,07 v_* \quad (40)$$

gefunden hat.

4. Wir erwähnten schon, daß in der exakten Lösung die Widerstandsziffer λ durch die Randbedingung $\frac{u}{u_1} = 1$ für $\eta = 1$ festgelegt wird. Unterwerfen wir (29) dieser Randbedingung, so wird diese Funktion, worauf wir schon hingewiesen haben, durch diesen Vorgang mit einem gewissen Fehler behaftet. Entsprechend wird die von uns so erhaltene Widerstandsziffer natürlich auch einen gewissen Fehler enthalten.

Man erhält so für die Widerstandsziffer

$$\frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \left[-1 + \ln \left(2 \kappa Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right) + \kappa \frac{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}}{2} \eta_0 \right] = 1 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{\kappa} \right) \quad (41).$$

Lösen wir nach λ auf, so

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2,3}{\kappa \sqrt{8}} \lg (Re \sqrt{\lambda}) + \frac{1}{\kappa \sqrt{8}} \left[-1 + \ln \frac{2 \kappa}{\sqrt{8}} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{\kappa} \right) + \kappa \frac{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}}{2} \eta_0 \right] \quad (42).$$

Führen wir wieder, wie üblich, statt der Maximalgeschwindigkeit u_1 die mittlere Durchflußgeschwindigkeit w als Bezugsgröße ein, so erhalten wir nach (38) $Re \sqrt{\lambda} = Re \sqrt{\bar{\lambda}}$; ferner nach (35) und (36)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}}} \frac{1}{\frac{w}{u_1}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}}} - \frac{1}{\kappa \sqrt{8}} \left[-\frac{7}{6} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{\kappa} \right].$$

Das gibt dann folgende Gleichung für die Widerstandsziffer

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}}} = \frac{2,3}{\kappa \sqrt{8}} \lg (\bar{Re} \sqrt{\bar{\lambda}}) + \frac{1}{\kappa \sqrt{8}} \left[-\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \frac{\mu}{\kappa} + \ln \frac{2 \kappa}{\sqrt{8}} + \kappa \frac{\bar{Re} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{8}}}{2} \eta_0 \right] \quad (43).$$

Hier ist nach (17) $\frac{Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}}}{2} \eta_0$ identisch mit der dimensionslosen Dicke $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$ der laminaren Unterschicht. Für die empirischen Koeffizienten κ , $\frac{\mu}{\kappa}$ und $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$ hatten wir erhalten: nach (23) und (24) $\kappa = 0,417$ und $\frac{v_* \delta_0}{\nu} = 7,01$; nach (32) $\frac{\mu}{\kappa} = -1,1$.

Damit lautet die Widerstandsformel

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}}} = 1,95 \lg (\bar{Re} \sqrt{\bar{\lambda}}) - 0,50 \quad (44),$$

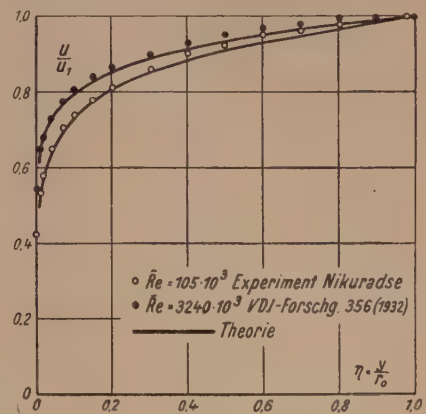


Bild 4. Geschwindigkeitsverteilung im Rohr

während sich experimentell für große Reynoldssche Zahlen nach Nikuradse [2]

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,95 \lg (\bar{Re} \sqrt{\lambda}) - 0,55 \quad \dots \quad (45)$$

ergibt.

Ohne Berücksichtigung des Gliedes μ/κ , also bei Beschränkung auf den Ansatz $\frac{l}{r_0} = \kappa \eta$, hätte man statt $-0,50$ die Konstante $-0,81$ erhalten.

IV. Zusammenfassung

An Hand des Prandtlschen Schubspannungsansatzes wird die Geschwindigkeitsverteilung berechnet und eine Widerstandsformel aufgestellt. Als empirische Koeffizienten treten die Dicke der laminaren Unterschicht und die Koeffizienten der Mischungswegverteilung auf. Gute Übereinstimmung mit Meßergebnissen.

Schrifttum

- [1] L. Prandtl: Bericht über die Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), S. 137.
- [2] J. Nikuradse: Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. VDI-Forschungsh. 356 (1932).
- [3] L. Prandtl: Tokio-Vortrag 1929.
- [4] L. Prandtl: Über den Reibungswiderstand strömender Luft. Ergebn. der AVA. III. (1927), S. 1.
- [5] L. Prandtl: Strömungslehre (1942), S. 149.
- [6] H. Reichardt, Die Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten. Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 297.
- [7] L. Prandtl: Durand Aerodyn. Th. III (1935), S. 141.

Eingegangen am 15. 7. 1950.

Ein Beitrag zur Berechnung der Knicklasten¹⁾

Von H. Jung in Stuttgart

Durch die Anwendung der Fouriertransformation gelingt es, verwickelte Knickfälle einfach zu lösen. Außerdem konnte auf diesem Weg ein neues Iterationsverfahren angegeben werden, das, wie in einer Arbeit noch gezeigt werden soll, sich auch auf die Stabschwingungen bei elastischer Auflagerung ausdehnen läßt.

By application of the Fourier transformation, complicated cases of buckling are easily solved. The method leads to a new iteration process that can be generalized to oscillations of bars in elastic bearings, as will be shown in a future paper.

En appliquant la transformation de Fourier, des cas compliqués de flambage sont faciles à résoudre. Un résultat de la méthode est un procédé nouveau d'itération, qui peut être généralisé, comme sera démontré dans une publication future, au cas d'oscillations de barres, dont les supports sont élastiques.

Путем применения преобразования Фурье автор очень просто решает сложные случаи прогнального изгиба. Кроме того ему удалось найти при помощи этого преобразования новый метод последовательных приближений, который, как это будет показано в дальнейшей работе, может быть распространён на случай колебаний стержня, лежащего на упругом основании.

1. Einleitung

Wird ein Stab durch Kräfte, die in Richtung der x -Achse wirken, beansprucht, so knickt er aus, wenn die Belastung einen kritischen Wert, die sog. Knicklast, überschreitet. Die Größe der Knicklast hängt wesentlich von den Einspannbedingungen an den Stabenden ab. Die beiden Grenzlagen für die Einspannung sind die gelenkige Lagerung und die vollkommene Einspannung, die bei technischen Problemen nie realisiert werden können.

Es soll aus diesem Grund gezeigt werden, wie durch Momente höherer Ordnung auf einfache Weise die Knicklasten bestimmt werden können, wenn Stäbe elastisch eingespannt und elastisch aufgelagert sind.

Wie in Ziffer 2 gezeigt wird, lassen sich diese Momente höherer Ordnung in einfacher Weise mit Hilfe der Fouriertransformation finden. Die Anwendung dieser Momente höherer Ordnung für Stäbe konstanten Querschnitts wird in Ziffer 3 gegeben. Mit den in Ziffer 2 und 3 gemachten Überlegungen läßt sich dann in Ziffer 4 ein neues Iterationsverfahren aufbauen, das gegenüber den bisher bekannten Methoden den Vorteil bietet, daß außer der Iterationsfunktion auch noch die Randbedingungen mitberücksichtigt werden. Dadurch ist es möglich, solche Probleme zu behandeln, bei denen die Stabenden beliebig gelagert sind, und der Stab ein veränderliches Trägheitsmoment hat. An den in Ziffer 5 durchgeführten Beispielen zeigt es sich, daß der benötigte Rechenaufwand gegenüber den sonstigen Methoden kleiner ist.

¹⁾ Auf der Tagung für angewandte Mathematik und Mechanik in Darmstadt 1950 wurde ein kurzer Bericht über dieses Verfahren gegeben.

2. Die am Stab auftretenden Singularitäten und ihre Unterfunktionen

Ein elastischer homogener Stab werde durch Kräfte, die senkrecht zur Stabachse wirken und in einer Ebene liegen, beansprucht. Die durch diese Kräfte hervorgerufene Durchbiegung genügt der Differentialgleichung

$$[E J(x) y''(x)]'' = p(x) \quad \dots \quad (1),$$

wobei

$p(x)$ die Belastung,
 $y(x)$ die Durchbiegung,
 $J(x)$ das Trägheitsmoment,
 E der Elastizitätsmodul bedeuten.

Die Ausdehnung des Stabes sei $-a \leq x \leq b$. In diesem Intervall ist auch $p(x)$ als stückweise stetig vorgegeben. Multipliziert man (1) mit $e^{i\lambda x}$ durch und integriert zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ so wird mit $p(x) = 0$ für $-\infty < x \leq -a$ und $b \leq x < +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (E J(x) \cdot y'')'' e^{i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{i\lambda x} dx \quad \dots \quad (2).$$

Die Belastung $p(x)$ des Stabes wird durch die Auflagerkräfte und Einspannmomente erweitert und mit $p(x)$ bezeichnet. Durch diese Erweiterung erreicht man, daß die Querkraftlinie und die Momentenlinie sich durch Fourierintegrale darstellen lassen. Wird in (2) die linke Seite zweimal partiell nach x integriert, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} -\lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} E J(x) y'' e^{i\lambda x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{i\lambda x} dx - A e^{-i\lambda a} - B e^{i\lambda b} - i\lambda M_A e^{-i\lambda a} - i\lambda M_B e^{i\lambda b} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{i\lambda x} dx \end{aligned} \right\} \quad (2a).$$

Mit der Fouriertransformation

$$\left. \begin{aligned} g(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) e^{i\lambda x} dx, \\ G(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

erhält man aus (2a)

$$M(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^b \bar{p}(\xi) e^{i\lambda(\xi-x)} d\xi d\lambda \quad \dots \quad (4).$$

Aus (4) ist ersichtlich, daß zur Bestimmung des Momentenverlaufes es nur darauf ankommt, die Unterfunktion der Gesamtbelastung zu kennen. Die Unterfunktionen von Einzelkräften und Einzelmomenten lassen sich einfach bestimmen.

Greift an der Stelle $x = \xi$ eine Einzelkraft von der Größe P an, so ist die Unterfunktion (vgl. Bild 1)

$$p(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P}{2\varepsilon} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} e^{i\lambda \bar{\xi}} d\bar{\xi} = P e^{i\lambda \xi} \quad \dots \quad (5).$$

Definiert man ein an der Stelle $x = a$ angreifendes Moment durch den Grenzwert (Bild 2)

$$M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P \cdot 2\varepsilon,$$

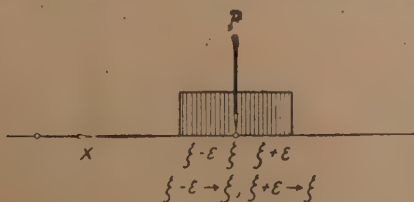


Bild 1

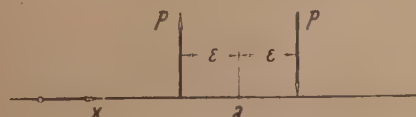


Bild 2

so lautet die Unterfunktion hierfür wegen (5)

$$m(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P \cdot 2\varepsilon \frac{e^{i\lambda(a+\varepsilon)} - e^{i\lambda(a-\varepsilon)}}{2\varepsilon} = M i \lambda e^{i\lambda a} \quad \dots \quad (6).$$

Um zu zeigen, wie ein Moment höherer Ordnung einen Knick in der elastischen Linie erzeugt, werde von der Differentialgleichung der elastischen Linie in der Form ausgegangen

$$EJ(x) y'' = -M(x) \dots \dots \dots (7).$$

Wird auf (7) die Fouriertransformation angewendet, so erhält man die Durchbiegung

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} \int_{-a}^b \frac{M(\xi)}{EJ(\xi)} e^{i\lambda(\xi-x)} d\xi d\lambda \dots \dots \dots (8).$$

Die Funktion $M(x)$ ist durch Momente zweiter und dritter Ordnung zu erweitern, die an den Auflagern angreifen, damit $y'(x)$ und $y(x)$ sich durch Fourierintegrale darstellen lassen. Um die Momente höherer Ordnung abzuleiten, kann im folgenden $J(x) = \text{konst.}$ vorausgesetzt werden, da das Verhalten der elastischen Linie nur an der Stelle $x = \zeta$ untersucht wird. Damit geht (8) über in

$$y(x) = \frac{1}{2\pi EJ(\zeta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} \int_{\zeta-\varepsilon}^{\zeta+\varepsilon} M(\xi) e^{i\lambda(\xi-x)} d\xi d\lambda \dots \dots \dots (8a).$$

Bekanntlich wird durch ein an der Stelle $x = \zeta$ angreifendes Moment ein Knick in der Krümmung der elastischen Linie hervorgerufen. Läßt man an der Stelle $\zeta - \varepsilon$ ein positives und an der Stelle $\zeta + \varepsilon$ ein negatives Moment angreifen, so erhält man eine Knickstelle in der elastischen Linie. Das Moment zweiter Ordnung wird durch den Grenzwert

$$N = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M \cdot 2\varepsilon$$

definiert. Damit lautet die Unterfunktion des Momentes zweiter Ordnung

$$n(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N}{EJ(\zeta)} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\zeta-\varepsilon}^{\zeta+\varepsilon} e^{i\lambda\xi} d\xi = \frac{N}{EJ(\zeta)} e^{i\lambda\zeta} \dots \dots \dots (9).$$

Greifen an der Stelle $\zeta - \varepsilon$ und $\zeta + \varepsilon$ jeweils ein Doppelmoment an, so ergibt sich mit demselben Grenzübergang wie in (6) das Moment dritter Ordnung

$$R = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N \cdot 2\varepsilon.$$

Die Unterfunktion für einen Sprung in der elastischen Linie wird damit

$$r(\lambda) = i\lambda \frac{R}{EJ(\zeta)} e^{i\lambda\zeta} \dots \dots \dots (10).$$

Diese Singularitäten wurden schon von Néményi²⁾ über die Maxwell'schen Einflußfunktionen abgeleitet.

Ist ein Stab an der Stelle $x = \zeta$ elastisch aufgelagert, so wird mit c der Federkonstanten des Auflagers und A der Auflagerkraft

$$\frac{R}{EJ(\zeta)} = cA.$$

Mit diesen Singularitäten (Einzelkraft, Einzelmoment, Moment zweiter und dritter Ordnung) lassen sich somit die Auflagerbedingungen berücksichtigen. In Ziffer 3 soll nun an einigen Beispielen gezeigt werden, wie sich diese Singularitäten bei der Stabknickung anwenden lassen.

3. Bestimmung der Knicklasten bei konstantem Trägheitsmoment

Wird ein an seinen Enden $x = -a$ und $x = +a$ beliebig gelagerter Stab durch eine Kraft, die in Richtung der Stabachse wirkt, beansprucht, so erhält man die Knicklasten als Eigenwert der Differentialgleichung

$$EJ \cdot y'' = -P \cdot y + M(x) \dots \dots \dots (11)$$

Die Belastungsfunktion $M(x)$ wird durch die Auflagebedingungen hervorgerufen. Mit der Fouriertransformation erhält man aus (11)

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\lambda^2 - \frac{P}{EJ}\right)} \int_{-a}^{+a} M(\xi) e^{i\lambda(\xi-x)} d\xi d\lambda \dots \dots \dots (12).$$

²⁾ P. Néményi, Über die Singularitäten der Elastizitätstheorie. Z. angew. Math. Mech. (1930), S. 383 ff.

Aus (12) sieht man, daß es nur darauf ankommt, die Unterfunktion

$$f(\lambda) = \int_{-a}^{+a} M(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi \dots \dots \dots (13)$$

zu kennen. Setzt man

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda^2 - \frac{P}{EJ}} e^{i\lambda x} d\lambda \dots \dots \dots (13a),$$

so soll $y(x)$ im Intervall $-\infty < x < +\infty$ beschränkt und quadratisch integrierbar sein. Dann ist auch die Funktion $\frac{f(\lambda)}{\lambda^2 - \frac{P}{EJ}}$ wegen (3) quadratisch integrierbar und beschränkt und es ist

für alle λ_K $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_K} \frac{f(\lambda)}{\lambda^2 - \frac{P}{EJ}} = c \dots \dots \dots (14).$

Die λ_K sind die Nullstellen des Nenners. Aus (14) lassen sich, wie an zwei Beispielen gezeigt wird, die Knicklasten bestimmen.

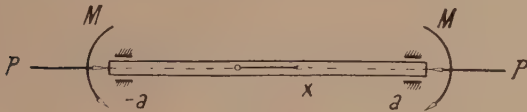


Bild 3

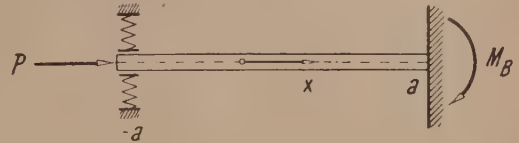


Bild 4

Durch Bild 3 sei der Belastungsfall gegeben. Mit (6) wird die Unterfunktion, die die Einspannung berücksichtigt,

$$f(\lambda) = \frac{i\lambda(-M_A e^{-i\lambda a} + M_A e^{i\lambda a})}{\lambda^2} = \frac{\sin \lambda a}{\lambda} 2 M_A \dots \dots \dots (15).$$

Geht man mit (15) in (13a) ein, so ist

$$y(x) = \frac{M_A}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \lambda a}{\lambda \left(\lambda^2 - \frac{P}{EJ} \right)} e^{-i\lambda x} d\lambda \dots \dots \dots (16).$$

Mit der Bedingung (14) erhält man aus (16)

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{n\pi}{a}$$

und damit auch die bekannte Knicklast.

Um die Verwendung der Momente höherer Ordnung zu zeigen, sei ein Belastungsfall mit elastischer Lagerung gegeben (vgl. Bild 4). Da am linken Auflager noch eine Durchbiegung auftreten kann, sind hier Momente höherer Ordnung anzubringen. Die Unterfunktion für die Auflagerkräfte und Momente lautet mit (5) bis (10)

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} (A e^{-i\lambda a} - A e^{i\lambda a} + i\lambda M_A e^{-i\lambda a} - \lambda^2 N_A e^{-i\lambda a} + i\lambda^3 R_A e^{-i\lambda a} - i\lambda M_B e^{i\lambda a}) \dots (17).$$

Für die Einspannung am linken Auflager macht man die Annahme

$$N_A = c_1 M_A; \quad R_A = c_2 A,$$

wobei c_1 und c_2 die Federkonstanten für die elastische Auflagerung und elastische Einspannung sind. Damit geht (17) über in

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} (A e^{-i\lambda a} - A e^{i\lambda a} + i\lambda M_A e^{-i\lambda a} - i\lambda M_B e^{i\lambda a} - \lambda^2 c_1 M_A e^{-i\lambda a} + i\lambda^3 c_2 A e^{-i\lambda a}) \dots (18).$$

Da das Moment beschränkt und quadratisch integrierbar sein soll, um es als Fourierintegral darstellen zu können, muß die Funktion $f(\lambda)$ nach (3) ebenfalls beschränkt und quadratisch integrierbar vorausgesetzt werden. Damit erhält man für $f(\lambda)$ die Bedingung

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda) = c,$$

aus der die Beziehung für die Einspannmomente

$$M_B = M_A - 2aA$$

folgt. Setzt man noch $M_A = \kappa A$, wobei κ ein noch unbekannter Proportionalitätsfaktor ist, so erhält man mit (18) und (19) für die Durchbiegung

$$y(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{P}{EJ} \right)} \left[i(-2 \sin \lambda a + \lambda^3 c_2 e^{-i\lambda a} + 2\lambda a e^{i\lambda a} + \kappa(\lambda \sin \lambda a - \lambda^2 c_1 e^{i\lambda a})) e^{-i\lambda x} d\lambda \right] \quad (20).$$

Mit (14) folgen aus (20) die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} -2 \sin \lambda a + \lambda^2 c_2 \cos \lambda a + 2\lambda a \cos \lambda a + \kappa \lambda^2 c_1 \sin \lambda a &= 0, \\ \lambda^3 c_2 \sin \lambda a - 2\lambda a \sin \lambda a + \kappa \lambda \sin \lambda a - \kappa \lambda^2 c_1 \sin \lambda a &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (21).$$

Setzt man in (21) $\lambda a = z$ und eliminiert κ , so bekommt man die transzendente Gleichung zur Bestimmung von z_0

$$-2 \sin^2 z + \left(z^3 \frac{c_2}{a^3} + 2z + 2z \frac{c_1}{a} \right) \frac{1}{2} \sin 2z - 2z^2 \frac{c_1}{a} \cos 2z - z^4 \frac{c_1 c_2}{a^2} = 0 \quad \dots (22).$$

Ist z_0 aus (22) bestimmt, so wird

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} = z_0.$$

4. Iterationsverfahren

Ausgangspunkt sei die Differentialgleichung in der Form

$$y'' = -\mu \frac{y(x)}{J(x)} \quad \dots \dots \dots (23),$$

wobei $\mu = \frac{P}{E}$ gesetzt wurde.

Wendet man auf (23) wieder die Fouriertransformation an, so erhält man

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(\xi)}{J(\xi)} e^{i\lambda(\xi-x)} d\xi d\lambda \quad \dots \dots \dots (24).$$

Setzt man in (24) $\mu = 1$, so wird mit $y_0(x)$ die Iterationsvorschrift³⁾

$$y_{n+1}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} \int_a^b \frac{y_n(\xi)}{J(\xi)} e^{i\lambda(\xi-x)} d\xi d\lambda \quad \dots \dots \dots (25).$$

Das aus (25) erhaltene $y_{n+1}(x)$ genügt bei allgemeiner Lagerung nur dann den Randbedingungen, wenn $y_n(x)$ schon die Eigenfunktion selbst ist. Da aber $y_n(x)$ im allgemeinen nur eine Näherung der Eigenfunktion ist, wird in (25) eine Fehlerfunktion $g_n(x)$ hinzugefügt. Wie in Ziffer 3 gezeigt wird, läßt sich diese Fehlerfunktion, die nur durch die Randbedingungen bestimmt wird, in einfacher Weise so ermitteln, daß

$$y_{n+1}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} \int_a^b \frac{y_n(\xi) + g_n(\xi)}{J(\xi)} e^{i\lambda(\xi-x)} d\xi d\lambda \quad \dots \dots \dots (26)$$

die Randbedingungen befriedigt. Für $n \rightarrow \infty$ muß, damit $y_n(x)$ gegen die Eigenfunktion konvergiert $g_n(x)$ gegen 0 bzw. gegen einen festen Wert konvergieren.

Aus der Bedingung (14) erhält man gerade die noch fehlenden Gleichungen, die zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen die Auflagerkräfte und Einspannmomente ergeben. Die Funktion $y_{n+1}(x)$ kann sehr einfach über die Residuen berechnet werden.

Aus den $y_n(x)$ lassen sich die Schwarzschen Konstanten bestimmen

$$\alpha_{n,n-1} = \int_a^b y_n y_{n-1} dx \quad \dots \dots \dots (27).$$

Bekanntlich bekommt man aus den $\alpha_{n,n-1}$ Näherungswerte für die Eigenwerte. Es wird

$$\mu = \frac{\alpha_{n,n-1}}{\alpha_{n,n}} \quad \dots \dots \dots (28).$$

³⁾ L. Collatz, Eigenwertprobleme. Leipzig 1945. S. 177 ff.

5. Beispiele zur Iterationsmethode

An einem bekannten Beispiel soll nun noch gezeigt werden, wie mit Hilfe der Iterationsmethode die Eigenwerte berechnet werden. Es wird der einseitig starr eingespannte Stab mit einer Last P an einem Stabende herausgegriffen (Bild 5).

Als Ausgangsfunktion wählt man

$$y_0(x) = x,$$

die die Randbedingungen noch nicht befriedigt. Mit $P=1$ wird die statische Gleichgewichtsbedingung

$$M - 1 = 0 \quad \dots \quad (29).$$

Die Unterfunktion der Fehlerfunktion ist damit

$$\bar{g}_0(\lambda) = \frac{1}{J\lambda^2} \left[- \int_0^1 M e^{i\lambda\xi} d\xi + N_A e^{i\lambda} - i\lambda R_A e^{i\lambda} \right] \quad \dots \quad (30).$$

Für die Durchbiegung erhält man mit (30) die Unterfunktion

$$\left. \begin{aligned} f_1(\lambda) &= \frac{1}{J\lambda^2} \left[- \int_0^1 M e^{i\lambda\xi} d\xi + \int_0^1 \xi e^{i\lambda\xi} d\xi + N_A e^{i\lambda} - i\lambda R_A e^{i\lambda} \right] \\ &= \frac{1}{J\lambda^2} \left[- \frac{M}{i\lambda} (e^{i\lambda} - 1) + e^{i\lambda} \left(\frac{1}{i\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{\lambda^2} + N_A e^{i\lambda} - i\lambda R_A e^{i\lambda} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (31).$$

Die Bedingung (14) führt auf das Gleichungssystem

$$-M + \frac{1}{2} + N_A = 0, \quad \frac{M}{2} - \frac{1}{3} - N_A + R_A = 0 \quad \dots \quad (32).$$

Aus (29) und (32) lassen sich die Momente höherer Ordnung und das Einspannmoment bestimmen. Die Durchbiegung wird

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{2\pi J} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{M}{i\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^4} \right) e^{-i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{J} \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (33).$$

Führt man mit (33) einen weiteren Iterationsschritt durch, so erhält man

$$y_2(x) = \frac{1}{6J^2} \left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{20} \right] \quad \dots \quad (34).$$

Bildet man mit (33) und (34) die Schwarzschen Konstanten, so erhält man Näherungswerte für den ersten Eigenwert.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu}_{12} &= \frac{\int_0^1 y_1^2 dx}{\int_0^1 y_1 y_2 dx} = 2,475 \cdot J \\ \bar{\mu}_{22} &= \frac{\int_0^1 y_1 y_2 dx}{\int_0^1 y_2^2 dx} = 2,473 \cdot J \end{aligned} \right\} \approx \frac{\pi^2}{4} \cdot J.$$

An dem durch Abb. 6 gegebenen Beispiel wird nun noch das Iterationsverfahren bei nicht konstantem Trägheitsmoment durchgeführt. Als Ausgangsfunktion werde gewählt

$$y_0(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$y_0(x)$ ist nur eine sehr rohe Näherung, die die Randbedingungen noch nicht befriedigt. Die statischen Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\left. \begin{aligned} -A + B &= 0, \\ A + B - M_A + M_B - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (35).$$

Die Fehlerfunktion $g_0(x)$ wird hierfür

$$g_0(x) = \begin{cases} A(1+x) - M_A, & -1 \leq x \leq 0 \\ -B(1-x) - M_B, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \dots \quad (36).$$

Aus (36) erhält man mit $y_0(x)$ und dem Verhältnis $\vartheta = J_1 : J_0$

$$f_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 J_1} \left[\vartheta \int_{-1}^0 [A(1-\xi) - M_A] e^{i\lambda\xi} d\xi - \int_0^1 [B(1-\xi) + M_B] e^{i\lambda\xi} d\xi + \int_0^1 (1-\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi \right] \quad (37).$$

Wird in (37) die Integration über ξ durchgeführt, so erhält man

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 J_1} \left[-\frac{1}{i\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{e^{i\lambda}}{\lambda^2} - \frac{A\vartheta}{\lambda^2} e^{-i\lambda} + \frac{B}{\lambda^2} e^{i\lambda} + \frac{M_A\vartheta}{i\lambda} e^{-i\lambda} - \frac{M_B e^{i\lambda}}{i\lambda} \right] \quad (37a).$$

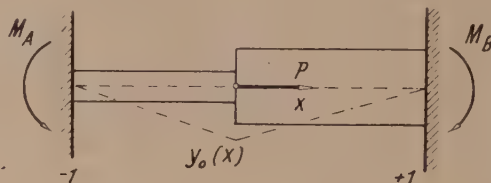


Bild 6

Ist der Stab nachgiebig gelagert, so sind in (37a) noch Momente höherer Ordnung nach (9) und (10) hinzuzufügen. Aus der Bedingung (14) folgen die beiden Gleichungen

$$\frac{A\vartheta}{2} - \frac{B}{2} - M_A\vartheta - M_B + \frac{1}{2} = 0, \quad \frac{A\vartheta}{3} + \frac{B}{3} - M_A\vartheta + M_B - \frac{1}{3} = 0 \quad (38)$$

Mit (35) und (38) lassen sich die unbekannten Auflagekräfte und Einspannmomente berechnen

Die Durchbiegung ist durch die Unterfunktionen

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(\lambda) &= \frac{\vartheta}{J_1 \lambda^2} \left(-\frac{A}{\lambda^2} e^{-i\lambda} + \frac{M_A}{i\lambda} e^{-i\lambda} \right), & -1 \leq x \leq 0, \\ \bar{f}_1^*(\lambda) &= \frac{1}{J_1 \lambda^2} \left(-\frac{e^{i\lambda}}{\lambda^2} + \frac{B}{\lambda^2} e^{i\lambda} - \frac{M_B e^{i\lambda}}{i\lambda} \right), & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

bestimmt. Wertet man die Integrale

$$y_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}_1(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}_1^*(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

mit Hilfe der Residuen aus, so erhält man

$$y_1(x) = \begin{cases} \frac{\vartheta}{J_1} \left[\frac{A}{6} (1+x)^3 - \frac{M_A}{2} (1+x)^2 \right] & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{J_1} \left[\frac{B-1}{6} (x-1)^3 - \frac{M_B}{2} (x-1)^2 \right] & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Die mit $y_0(x)$ und $y_1(x)$ berechneten Schwarzschen Konstanten sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1

i	$\vartheta = 2$		$\vartheta = 1$	
	α_{ik}	$\bar{\mu}_i$	α_{ik}	$\bar{\mu}_i$
0	2	4,72 J_1	2	22,8 J_1
	3		3	
1	17	4,75 J_1	7	22,6 J_1
	120 J_1		240 J_1	
2	143	16 · 630 J_1^2	13	16 · 630 J_1^2
	108 · 45 · J_1^2			

Mit $y_1(x)$ als Ausgangsfunktion läßt sich sofort ein $y_2(x)$ berechnen und damit $\bar{\mu}$ verbessern.
Eingegangen 6. Juni 1950.

KLEINE MITTEILUNGEN

Die Summe der reziproken Potenzen der Nullstellen von $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ hinsichtlich z .

Im folgenden soll eine Gesetzmäßigkeit hergeleitet werden, die für die Summe einer beliebigen negativ ganzzahligen Potenz der unendlich vielen Nullstellen von $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ hinsichtlich z bei festen Werten von κ und μ besteht. Es dürfte zum besseren Verständnis erwünscht sein, den Beweisen dieser Formel zunächst einige allgemeine Tatsachen über die Verteilung dieser Nullstellen vorausszuschicken.

1. Allgemeine Aussagen über die Nullstellen von $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ hinsichtlich z . Es wird hier unter dem Symbol $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ die durch die Gleichung

$$M_{\kappa, \mu/2}(z) = \frac{1+\mu}{2} \cdot e^{-z/2} \cdot {}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa; 1+\mu; z\right) \Gamma(1+\mu) - z^{\frac{1+\mu}{2}} \cdot e^{+z/2} \cdot {}_1F_1\left(\frac{1+\mu}{2} + \kappa; 1+\mu; -z\right) \Gamma(1+\mu) \quad (1)$$

definierte Funktion verstanden, die abgesehen von dem Faktor $z(1+\mu)/2$ für alle $\frac{1+\mu}{2} \pm \kappa \neq 0, -1, -2 \dots$ eine in z ganze transzendente Funktion und bekanntlich die um die Stelle $z=0$ herum existente Lösung der Wh.D.Gl.

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{1-\mu^2}{4z^2} \right] \cdot y = 0 \quad (1a)$$

ist. Für $\Re(\mu) > -1$ zählt daher zu den Nullstellen von $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ stets auch die Stelle $z=0$. Diese triviale Nullstelle bleibt im folgenden außer Betracht. Wir erwähnen noch als eine weitere Folge von (1), daß wegen der reinen multiplikativen Verzweigung der Funktion an der Stelle $z=0$ jede Nullstelle des Hauptzweiges aus dem Bereich $-\pi < \arg(z) \leq +\pi$ auch eine Nullstelle irgendeines beliebigen anderen Zweiges dieser Funktion ist.

Aus der D.Gl. (1a) folgt in bekannter Schlußweise, daß alle evtl. vorhandenen Nullstellen nur einfach sein können. Außerdem müssen die evtl. Nullstellen der Funktion in unendlicher Zahl auftreten, denn sonst wäre die Funktion $z^{(1+\mu)/2} / (z^2 \cdot M_{\kappa, \mu/2}(z))$, die für $|z| \rightarrow \infty$ im ganzen Winkelbereich $|\arg(z)| \leq \pi$ verschwindet, eine rationale Funktion, was sie aber auf Grund ihrer asymptotischen Entwicklung gewiß nicht ist. Die unendlich vielen Nullstellen können dann aber nach einem bekannten funktionentheoretischen Satz nur den Punkt ∞ zur Häufungsstelle haben. Aus den Rekursionsformeln, die die verwandten Funktionen $M_{\kappa \pm 1/2, \mu/2 \pm 1}$ mit $M_{\kappa, \mu/2}$ verbinden, und aus der Einfachheit der Nullstellen folgt ferner, daß die Nullstellen dieser Funktionen von denen der Funktion $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ selbst stets verschieden sind. Aus der bekannten Beziehung

$$M_{-\kappa, \mu/2}(z \cdot e^{\pm \pi i}) = e^{\pm \frac{\pi i}{2}(1+\mu)} \cdot M_{\kappa, \mu/2}(z) \quad (2)$$

geht schließlich noch hervor, daß die Nullstellen von $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ entgegengesetzt gleich denen der Funktion $M_{-\kappa, \mu/2}(z)$ sind.

Da die Nullstellen von $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ bis ins Unendliche ausstrahlen, so vermag die asymptotische Entwicklung dieser Funktion für große Werte von z sehr wohl eine erste Information über die Lage der großen Nullstellen

von $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ zu geben. Aus ihr folgt mit den Abkürzungen

$$\left\{ \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} + \kappa\right) / \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa\right) \right\}^{1/2} = e^{\alpha + i\beta} \quad (3\alpha)$$

mit $\beta = 0$ für $\frac{1+\mu}{2} \pm \kappa > 0$

$$\kappa = \kappa_1 + i\kappa_2 \quad (\kappa_{1,2} \geq 0) \dots \dots (3\beta),$$

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} \dots \dots \dots (3\gamma),$$

daß sich die weit entfernten Nullstellen $z = z_n$ der Funktion $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ für $n \rightarrow \infty$ bei reellen Werten von $\mu > -1$ nach Betrag $|z_n|$ und Phase φ_n aus den beiden Formeln

$$|z_n| \pm 2\kappa_2 \cdot \ln |z_n| \sim \pi \cdot \left(2n + \frac{\mu-1}{2} \right) \pm 2\beta \quad (4a)$$

$$\varphi_n \sim \mp \left\{ \frac{\pi}{2} - (2\kappa_1 \cdot \ln |z_n| - 2\alpha) / |z_n| \right\} \quad (4b)$$

$$\text{ob. Vorzeichen: } -\frac{3\pi}{2} < \varphi_n < +\frac{\pi}{2}$$

$$\text{unt. Vorzeichen: } -\frac{\pi}{2} < \varphi_n < +\frac{3\pi}{2}$$

berechnen lassen. Die Nullstellen aus dem Bereich $-\pi < \arg(z) \leq +\pi$ können also im Falle eines beliebigen komplexen κ in zwei Gruppen zerlegt werden. Die Nullstellen der ersten Gruppe nähern sich asymptotisch der negativ imaginären Achse der z -Ebene, und zwar von rechts oder von links her, je nachdem $\kappa_1 \geq 0$ ist, die zweite Gruppe von Nullstellen unter dem gleichen Verhalten der positiv imaginären Achse. Zwei demselben n entsprechende Nullstellen beider Gruppen liegen aber für ein $\kappa_2 \neq 0$ nicht symmetrisch zur reellen Achse. Erst für ein reellwertiges κ bilden zwei solche Nullstellen ein konjugiert komplexes Paar. Der Abstand zweier aufeinander folgender Nullstellen nähert sich mit $n \rightarrow \infty$ dem Wert 2π . Ist $\kappa_1 = 0$ und also $\kappa = i \cdot \tau$ mit $\tau \geq 0$, so ist nach (3a) auch $\alpha = 0$, und es liegen dann zum mindesten die weit entfernten Nullstellen in diesem Falle genau auf der imaginären Achse der z -Ebene. Daß diese Feststellung unter der angegebenen Beschränkung sogar für alle Nullstellen zutrifft, kann man leicht nachweisen, indem man von der D.Gl.

$$\left(\zeta \cdot y' \right)' - \left(\frac{\bar{\mu}^2/4}{\zeta} - \frac{\zeta}{4} \right) \cdot y + (\tau_1 + i\tau_2) \cdot y = 0 \quad (5)$$

$$(\tau = \tau_n + i\tau_2) \dots \dots \dots$$

für die Funktion $M_{i\tau, \mu/2}(-i\zeta)/(-i\zeta)^{1/2}$ ausgeht. Von den damit für ein reelles τ selbst als reell erkannte Nullstellen der Funktion $M_{i\tau, \mu/2}(-i\zeta)$ läßt sich dann noch weiter zeigen, daß jede dieser unendlich vielen Nullstellen mit wachsenden Werten von τ an Größe abnimmt.

Die allgemeinen Angaben mögen noch der Vollständigkeit halber durch die Ergebnisse einer Arbeit von A. Kienast [1] ergänzt werden. Es gelang ihm nämlich in der genannten Arbeit nachzuweisen, daß die Funktion $M_{\kappa, \mu/2}(z)/z(1+\mu)/2$ bei reellen Werten von κ und μ zwar keine positiven, wohl aber $n+1$ negative reelle Nullstellen besitzt, falls mit $n = 0, 1, 2, \dots, -n-1 < (\mu+1)/2 + \kappa < -n$ ist. Hingegen hat sie keine negativen, wohl aber $n+1$ positive Nullstellen für ein $-n-1 \geq (\mu+1)/2 - \kappa < -n$. Dabei ist eine wesentliche Voraussetzung, daß $\mu > -1$ ist. Auch über die Zahl der Nullstellen im Falle eines $\mu < -1$ vermochte er präzise Aussagen zu machen. Sein Beweisverfahren nützt die Tatsache aus, daß die Funktionen K_0, K_1, \dots, K_m mit $K_m = M_{\kappa+m, \mu/2}(z) \cdot z - (1+\mu)/2$ mit $m = 0, 1, \dots, n$ eine Sturmsche Kette bilden. Diese Angaben dürften zum Verständnis des Folgenden ausreichen,

2. Die Herleitung der Summenformel. Wir gehen zum Beweise der Summenformel von der Beziehung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{R_n}^{(0+)} \frac{M_{\kappa, \mu/2+1}(v)}{M_{\kappa, \mu/2}(v)} \cdot \frac{dv}{v(v-z)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{M_{\kappa, \mu/2+1}(z)}{M_{\kappa, \mu/2}(z)} + \sum_{\lambda=1}^N \frac{M_{\kappa, \mu/2+1}(a_\lambda)}{M'_{\kappa, \mu/2}(a_\lambda)} \cdot \frac{1}{a_\lambda(a_\lambda-z)} \quad (1)$$

mit $a_\lambda = a_\lambda(\kappa, \mu)$

aus, die eine unmittelbare Folge des Residuensatzes von Cauchy ist. Das links stehende Integral, dessen Integrand auf Grund von 1. (1) eine in v eindeutige Funktion ist, ist längs eines geschlossenen Kreises mit sehr großem Radius R_n erstreckt zu denken, der sich zwischen den Nullstellen a_N und a_{N+1} hindurchzieht. Auf der rechten Seite von (1) sind die Nullstellen a_λ von $M_{\kappa, \mu/2}(v)$, die selbstredend von κ und μ abhängen, so zu zählen, daß für $\lambda = 1, 2, 3, \dots$ $|a_\lambda| \leq |a_{\lambda+1}| \leq |a_{\lambda+2}| \dots$ ist. An Hand der asymptotischen Entwicklung von $M_{\kappa, \mu/2}(v)$ für $|v| \rightarrow \infty$ läßt sich dann ohne Schwierigkeit zeigen, daß das in (1) unter dem Integralzeichen auftretende Verhältnis der beiden M -Funktionen für $v \rightarrow \infty$ und für alle $|\arg(v)| \leq \pi$ stets beschränkt bleibt. Für $R_n \rightarrow \infty$ folgt dann aus (1) die Relation

$$\frac{M_{\kappa, \mu/2+1}(z)}{M_{\kappa, \mu/2}(z)} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{M_{\kappa, \mu/2+1}(a_\lambda)}{M'_{\kappa, \mu/2}(a_\lambda)} \cdot \frac{z}{a_\lambda(z-a_\lambda)} \quad (2).$$

Nun läßt sich andererseits aus den Integraldarstellungen, die für die Funktion $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ bekannt sind, leicht die Rekursionsformel

$$(1+\mu) \cdot M'_{\kappa, \mu/2}(z) = \left\{ \frac{(1+\mu)^2}{2z} - \kappa \right\} \cdot M_{\kappa, \mu/2}(z) - \left\{ \kappa^2 - \left(\frac{1+\mu}{2} \right)^2 \right\} M_{\kappa, \mu/2+1}(z) \quad (3a)$$

aufstellen. Sie kann nach Division durch $z^{\frac{1+\mu}{2}}$ und $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ nach Zusammenfassung geeigneter Glieder auf die Form

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \ln \left\{ e^{\frac{\kappa(1+\mu) \cdot z}{2}} \cdot \frac{M_{\kappa, \mu/2}(z)}{z^{(1+\mu)/2}} \right\} \\ = \frac{\left(\frac{\mu+1}{2} \right)^2 - \kappa^2}{1+\mu} \cdot \frac{M_{\kappa, \mu/2+1}(z)}{M_{\kappa, \mu/2}(z)} \quad (\mu \neq -1) \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

gebracht werden. Aus (3a) folgt für jedes a_λ : Es ist

$$M_{\kappa, \mu/2+1}(a_\lambda) \cdot M'_{\kappa, \mu/2}(a_\lambda) = - \frac{1+\mu}{\kappa^2 - \left(\frac{1+\mu}{2} \right)^2}$$

und daher in Rücksicht auf (3b), (2) und 1. (1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \ln \left\{ e^{\frac{\kappa - \frac{1+\mu}{2}}{1+\mu}} \cdot {}_1F_1 \left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa; 1+\mu; z \right) \right\} \\ = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{z}{a_\lambda(z-a_\lambda)} \quad (\mu > -1) \end{aligned} \right\} \quad (4).$$

Aus (4) entsteht durch Integration zwischen den Grenzen 0 und z nebenbei die zuerst von J. Horn [2] angegebene Produktdarstellung

$$M_{\kappa, \mu/2}(z) = z^{(1+\mu)/2} \Gamma(1+\mu) \cdot e^{-z \cdot \kappa/(1+\mu)} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\lambda} \right) \cdot e^{z/a_\lambda} \quad (4a),$$

von der im vorliegenden Falle auch unmittelbar hätte ausgegangen werden können.

Mit der ständigen Abkürzung

$$S_p = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{a_\lambda^p} \quad p=2, 3, 4, \dots \quad (5)$$

ist nun für alle $|z| < |a_1| \leq |a_2| \dots$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{z}{a_\lambda(z-a_\lambda)} = - \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \cdot S_{n+2} \quad (6a).$$

Andererseits besteht die in einem Kreise von nicht verschwindendem Radius absolut konvergente Entwicklung

$$\ln f(z) = \ln \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right\} = \ln b_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^p}{p} \cdot C_p \quad (6b)$$

mit

$$C_p = (-)^{p-1} \begin{vmatrix} 1 \cdot \frac{b_1}{b_0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 \cdot \frac{b_2}{b_0} & \frac{b_1}{b_0} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p-1) \frac{b_{p-1}}{b_0} & \frac{b_{p-2}}{b_0} & \dots & \dots & \frac{b_1}{b_0} & 1 \\ p \cdot \frac{b_p}{b_0} & \frac{b_{p-1}}{b_0} & \frac{b_{p-2}}{b_0} & \dots & \frac{b_2}{b_0} & \frac{b_1}{b_0} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Setzt man im vorliegenden Falle

$$f(z) \equiv {}_1F_1 \left(\frac{1+\mu}{2} - \kappa; 1+\mu; z \right),$$

so ist mit

$$(\mu)_0 = 1, (\mu+1)_p = (\mu+1)(\mu+2) \dots (\mu+1+p-1) \\ b_0 = 1 \quad \dots \quad (7a)$$

$$b_p = \frac{\left(\frac{\mu+1}{2} - \kappa \right)_p}{(\mu+1)_p \cdot p!} = \frac{(-)^p}{(\mu+1)_p \cdot p!} \cdot \sum_{\lambda=1}^p \frac{(p-1)}{(\lambda-1)} \left\{ \begin{aligned} & \left(\kappa - \frac{\mu+1}{2} \right)^\lambda \cdot B_{p-\lambda}^p \quad (p=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (7b)$$

und es folgt (4), (5) und (6b)

$$S_p = -C_p \quad (p=2, 3, 4, \dots) \quad (8).$$

Löst man die Determinante (7) von der rechten unteren Ecke her auf und berücksichtigt dabei die Gl. (8), so gelangt man zu der Beziehung

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{p-2} b_\lambda \cdot S_{p-\lambda} - b_{p-1} \cdot b_1 + b_p \cdot p = \sum_{\lambda=0}^{p-2} b_\lambda \cdot S_{p-\lambda} \\ + \frac{\left(\frac{\mu+1}{2} - \kappa \right)_{p-1} \cdot \left(\frac{\mu+1}{2} + \kappa \right)}{(\mu+1)_p \cdot (\mu+1)(p-2)!} = 0 \quad (p=2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

der zufolge sich die Summe S_p durch die $p-2$ vorangehenden Summen $S_{p-1}, S_{p-2}, \dots, S_2$ linear ausdrücken läßt.

Mit Hilfe von (7), (8) und (9a) errechnen sich damit für S_2, \dots, S_6 die folgenden Ausdrücke:

$$S_2 = \frac{\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2}{(\mu+1)^2 \cdot (\mu+2)} \cdot \dots \cdot (10a)$$

$$S_3 = \frac{2\kappa \cdot \left(\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2\right)}{(\mu+1)^3 (\mu+2) (\mu+3)} \cdot \dots \cdot (10b)$$

$$S_4 = \frac{\left(\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2\right) \cdot \left[\left(\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2\right) (5\mu+11) + (\mu+1)^2 (\mu+2)\right]}{(\mu+1)^4 (\mu+2)^2 (\mu+3) (\mu+4)} \cdot \dots \cdot (10c)$$

$$S_5 = \frac{2\kappa \cdot \left(\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2\right) \cdot \left[\left(\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2\right) (7\mu+19) + (\mu+1)^2 (\mu+2)\right]}{(\mu+1)^5 (\mu+2)^2 (\mu+3) (\mu+4) (\mu+5)} \cdot \dots \cdot (10d)$$

$$S_6 = \frac{\left(\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2\right) \cdot \left[\left(\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2\right)^2 \cdot A + \left(\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2\right) \cdot B + (\mu+1)^4 (\mu+2)^2 (\mu+3)\right]}{(\mu+1)^6 (\mu+2)^3 (\mu+3)^2 (\mu+4) (\mu+5) (\mu+6)} \cdot \dots \cdot (10e)$$

und darin ist

$$A = 2 \cdot [21\mu^3 + 181\mu^2 + 513\mu + 473]$$

$$B = (\mu+1)^2 (\mu+2) (14\mu^2 + 85\mu + 131)$$

3. Allgemeine Gesetzmäßigkeiten im Aufbau der S_p und Sonderfälle. Wir besprechen noch in Kürze einige allgemeine Eigenschaften der reziproken Potenzsummen S_p , wie sie in den angegebenen speziellen Formeln bereits deutlich hervortreten.

α) Alle Potenzsummen S_p sind gerade oder ungerade Funktionen von κ , je nachdem p selbst gerade oder ungerade ist.

Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus Gl. 1. (2) und 2. (5).

β) Alle S_p müssen den Faktor $\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2$ aufweisen. Da nämlich für $\kappa = \pm \frac{\mu+1}{2}$ nach Gl. 1. (1)

$$M_{\pm \frac{\mu+1}{2}, \mu/2}(z) = z^{(1+\mu)/2} \cdot e^{\pm z/2}$$

ist, so hat in diesem Falle die Funktion $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ keine im Endlichen gelegenen Nullstellen. Daß in den Gl. 2.

(10a...e) der mit dem Faktor $\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2$ multiplizierte Term im Zähler der Brüche ebenfalls stets so geschwieben worden ist, daß darin Potenzen von $\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2$ auftreten und nicht die Potenzen von κ^2

allein, ist freilich eine willkürliche Maßnahme, die aber in bezug auf die Gestalt des letzten Summanden zweckmäßig zu sein scheint.

γ) Der Nenner $N_p(\mu)$ von S_p hat die allgemeine Form:

$$N_p(\mu) = (\mu+1)^{[p/1]} \cdot (\mu+2)^{[p/2]} \cdot (\mu+3)^{[p/3]} \cdot \dots \cdot (\mu+p)^{[p/p]} \quad (1).$$

Darin bedeuten die $[p/n]$ diejenigen größten ganzen positiven Zahlen, die eben noch kleiner oder gerade gleich p/n sind. Es sind also in (1) stets $[p/1] = p$ und $[p/p] = 1$. Dieses Gesetz wird durch den Aufbau der Nenner in den obigen Gl. 2. (10a...e) nahegelegt und läßt sich dann mit Hilfe von 2. (9a) durch den Schluß von n auf $n+1$ auch leicht allgemein beweisen.

Auf Grund dieser Ergebnisse kann demnach allgemein gesetzt werden:

$$S_{2p} = 1/N_{2p}(\mu) \cdot \sum_{n=1}^p \alpha_n^{(2p)} \cdot \left[\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2\right]^n \quad (2a)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{2p+1} &= 2\kappa/N_{2p+1}(\mu) \\ &\cdot \sum_{n=1}^p \alpha_n^{(2p+1)} \left[\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2\right]^n \end{aligned} \right\} \cdot \dots \cdot (2b)$$

δ) In diesem Ansatz kann über den Summanden mit dem Koeffizienten $\alpha_n^{(p)}$ von vornherein eine ganz präzise Aussage gemacht werden. Dividiert man nämlich die Gl. 2. (9a) durch $\frac{\mu+1}{2} - \kappa$ und läßt dann

$\kappa \rightarrow \frac{\mu+1}{2}$ gehen, so erhält man die Relationen

$$\lim_{\kappa \rightarrow \frac{\mu+1}{2}} \left\{ \frac{S_p}{\kappa - \frac{\mu+1}{2}} \right\} = \frac{1}{(\mu+1)_p} \cdot \dots \cdot (3a)$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \frac{\mu+1}{2}} \left\{ \frac{S_p}{\kappa^2 - \left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2} \right\} = \frac{1}{(\mu+1)(\mu+1)_p} \cdot \dots \cdot (3b).$$

Führt man aber denselben Grenzübergang an den Gl. (2a, b) durch, so ergibt sich schließlich im Hinblick auf (3) das Formelpaar

$$\alpha_1^{(2p)} = \frac{N_{2p}(\mu)}{(\mu+1)(\mu+1)_p} \cdot \dots \cdot (4a)$$

$$\alpha_1^{(2p+1)} = \frac{N_{2p+1}(\mu)}{(\mu+1)^2 \cdot (\mu+1)_{2p+1}} \cdot \dots \cdot (4b).$$

Auf die nämliche Weise würde man auch für die höheren Koeffizienten $\alpha_n^{(p)}$ zu allgemeinen Darstellungsforneln gelangen.

Bemerkenswert sind die Sonderfälle $\kappa = 0$ und $\kappa = m + \frac{\mu+1}{2}$ mit $m = 1, 2, 3, \dots$. Für $\kappa = 0$ werden nämlich die Nullstellen von $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ identisch mit den Nullstellen der modifizierten Besselschen Funktion $I_{\mu/2}(z/2)$. Es ist also in der üblichen Bezeichnungsweise in diesem Falle

$$\left. \begin{aligned} a_{2\lambda-1} &= +2i \cdot j_{\mu/2, \lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots) \\ a_{2\lambda} &= -2i \cdot j_{\mu/2, \lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \cdot \dots \cdot (5).$$

In der Tat liegen jetzt für $\kappa = 0$ alle a_λ nicht nur auf der imaginären Achse der z -Ebene, sondern sie liegen dort noch obendrein symmetrisch zum Ursprung. Es leuchtet daher ein, daß im vorliegenden Falle die ungeraden Potenzsummen verschwinden. Die geraden Potenzsummen S_2, S_4, S_6 der Gl. 2. (10a, c und e) aber gehen dann in die zuerst von Rayleigh [3] aufgestellten Formeln für die reziproken Potenzsummen der $j_{\mu, \lambda}$ über.

Wird andererseits $\kappa = m + \frac{1+\mu}{2}$, so entartet bekanntlich die Funktion $M_{\kappa, \mu/2}(z)$ im wesentlichen in das Laguerre-Polynom $L_m^{(\mu)}(z)$. In diesem Falle bestehen also die S_p jeweils nur aus p Summanden, und man rechnet leicht aus, daß z. B. für

$$m = 1: \quad S_p = \frac{1}{(1+\mu)^p} \cdot \dots \cdot (6a)$$

$$m = 2: \quad S_p = \frac{2}{[(\mu + 1)(\mu + 2)]^p} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{p/2} \binom{p}{2\lambda} \cdot (2 + \mu)^{p-\lambda} \quad (p = 2, 3, \dots) \right\} \quad (6b)$$

ist. Auf diese Weise ergibt sich eine einfache Kontrollmöglichkeit für die allgemeinen Summenformeln.

Literaturangaben.

- [1] A. Kienast: Untersuchungen über die Lösungen der D.Gl. (...). Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft 57 (1921).
[2] J. Horn: Math. Ann. 49 (1897), S. 475 ff.
[3] Lord Rayleigh: Sci. Pap. I (1899).

Darmstadt.

Herbert Buchholz.

Ein übersichtliches Schema für die Matrizenmultiplikation.

Für die numerische Rechnung ist es häufig bequemer, zwei zu multiplizierende Matrizen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} nicht nebeneinander, sondern nach Art des folgenden Schemas anzuordnen:

$$\begin{array}{c} [\mathfrak{B}] \\ \left[\begin{array}{c} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{array} \right] \\ [\mathfrak{A}] [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]; [a_{j1} \ a_{j2} \ a_{j3} \ \dots \ a_{jn}] \quad \left[\begin{array}{c} \uparrow \\ \leftarrow c_{jk} \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} (4) \leftarrow \left[\begin{array}{cccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ 1 & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ 0 & 1 & p_{33} & \dots & p_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{nn} \end{array} \right] \end{array} & (3) \\ & \downarrow & \uparrow \\ & \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & t_{n2} & t_{n3} & \dots & t_{nn} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n}t_{nn} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n}t_{nn} \\ a_{31} & \dots & \dots & a_{3n}t_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}t_{nn} \end{array} \right] \end{array} & (2) \\ & \downarrow & \nearrow \\ \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n}t_{nn} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n}t_{nn} \\ a_{31} & \dots & \dots & a_{3n}t_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}t_{nn} \end{array} \right] \end{array} & (1) \end{array}$$

Jedes Element der Produktmatrix $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ wird gefunden durch Bildung des inneren Produktes der linksstehenden Zeile von \mathfrak{A} mit der darüberstehenden Spalte von \mathfrak{B} . Man sieht bei dieser Anordnung unmittelbar, daß \mathfrak{A} ebensoviel Spalten wie \mathfrak{B} Zeilen haben muß, damit die Multiplikation überhaupt ausführbar ist.

Auch bei der Multiplikation von mehr als zwei Matrizen ist die Schreibweise zweckmäßig. Sie läßt erkennen, daß jede Matrizenmultiplikation sich in ihre einzelnen Zeilen (Spalten) auflösen läßt, sofern man mit der Matrix ganz links (rechts) zu multiplizieren beginnt.

Besonders angebracht ist das Schema bei dem Verfahren von K. Hessenberg zur Aufstellung der charakteristischen Gleichung $\varphi(k) = |\mathfrak{A} - k\mathfrak{E}|$ einer gegebenen quadratischen Matrix \mathfrak{A} . Hessenberg transformiert die Matrix \mathfrak{A} durch Multiplikation mit einer geeigneten Matrix \mathfrak{X} von rechts und mit ihrer Reziproken \mathfrak{X}^{-1} von links in eine Matrix der Gestalt

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & \dots & p_{1, n-1} & p_{1n} \\ 1 & p_{22} & p_{23} & p_{24} & \dots & p_{2, n-1} & p_{2n} \\ 0 & 1 & p_{33} & p_{34} & \dots & p_{3, n-1} & p_{3n} \\ 0 & 0 & 1 & p_{44} & \dots & p_{4, n-1} & p_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_{nn} \end{bmatrix}$$

mit den gleichen charakteristischen Zahlen wie \mathfrak{A} und zeigt, daß die Transformationsmatrix \mathfrak{X} im allgemeinen die Form

$$\mathfrak{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t_{42} & t_{43} & t_{44} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & t_{n2} & t_{n3} & t_{n4} & \dots & t_{n, n-1} & t_{nn} \end{bmatrix}$$

haben muß.

Schreibt man an Stelle von $\mathfrak{X}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{B}$ nun $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{B}$ und ordnet dies in der folgenden Weise an:

$$\begin{array}{c} [\mathfrak{B}] \\ [\mathfrak{X}] [\mathfrak{A}\mathfrak{X}] \\ [\mathfrak{A}] [\mathfrak{X}\mathfrak{B}] \end{array}$$

so erhält man zur Bestimmung der Elemente t_{ik} und $p_{\mu\mu}$ (soweit sie verschieden von 0 oder 1 sind) das folgende einfache Schema.

Die Matrizen $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$, \mathfrak{B} und \mathfrak{X} werden in der durch die Pfeile gekennzeichneten Reihenfolge spaltenweise ausgefüllt. Zunächst bildet man die erste Spalte von $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ in ① (sie ist gleich der ersten Spalte von \mathfrak{A}) und schreibt sie noch einmal in ② ein. Dann füllt man die erste Spalte von \mathfrak{B} aus, danach die zweite Spalte von \mathfrak{X} . Jetzt kann man die zweite Spalte von $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ bilden, darauf die zweite Spalte von \mathfrak{B} , dann die dritte Spalte von \mathfrak{X} usw. Zur Bestimmung der noch unbekannten Elemente in den Matrizen \mathfrak{B} und \mathfrak{X} sind immer nur einfache Additionen, Multiplikationen und Divisionen erforderlich. Ist \mathfrak{B} gefunden, so läßt

sich $\varphi(k) = |\mathfrak{A} - k\mathfrak{E}| = |\mathfrak{B} - k\mathfrak{E}|$ bequem rekursiv auflösen, indem man der Reihe nach die Hauptunterdeterminanten D_1, D_2, \dots, D_n ermittelt, wo D_q die durch Fortlassen der letzten $n - q$ Zeilen und Spalten entstehende q -reihige Unterdeterminante bedeutet. Sind die k_ν berechnet, so werden ebenso einfach die Eigenvektoren η_ν zur Matrix \mathfrak{B} bestimmt und mit Hilfe von

$$\eta_\nu = \mathfrak{X} y_\nu$$

zurücktransformiert.

Es kann nun vorkommen, daß bei der Berechnung von \mathfrak{X} ein Element der Hauptdiagonale gleich Null wird. Man hat dann zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Mindestens ein Element der ν -ten Spalte von \mathfrak{X} ist $\neq 0$.

2. Alle Elemente der ν -ten Spalte von \mathfrak{X} sind $= 0$. Im ersten Falle wird die Matrix \mathfrak{X} , im zweiten Falle die Matrix \mathfrak{B} abgeändert, und zwar:

Fall 1.) Ist $t_{\nu\nu} = 0$ und $t_{\nu+\sigma, \nu}$ das erste von Null verschiedene Element in der ν -ten Spalte von \mathfrak{X} , so ersetze man die Null an der Stelle $\nu, \nu + \sigma$ (also oberhalb der Hauptdiagonale) durch ein vorläufig noch unbekanntes, aber von Null verschiedenes Element und außerdem das Element $t_{\nu+\sigma, \nu+\sigma}$ durch eine Null.

Fall 2.) Sind alle $t_{\mu\nu} = 0$ ($\mu = 1, 2, \dots, n$), so ersetze man die Null an der Stelle $t_{\nu\nu}$ durch eine 1

und in der Matrix \mathfrak{P} die 1 an der Stelle $r, r-1$ durch eine Null. Die Determinante $|\mathfrak{P} - k\mathfrak{E}|$ zerfällt dann in das Produkt zweier einzelner Determinanten und ist besonders bequem auswertbar.

Ein einfaches Beispiel diene zur Erläuterung:

$$\mathfrak{P} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{T} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{M} \mathfrak{T}$$

$$\mathfrak{M} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Kontrolle:} \\ \text{Spur } \mathfrak{M} = \text{Spur } \mathfrak{P} \\ = 5 \end{matrix}$$

Bei der Berechnung der vierten Spalte von \mathfrak{T} ergibt sich mit den ursprünglichen Matrizen \mathfrak{T} und \mathfrak{P} zunächst $t_{44} = 0$, so daß \mathfrak{T}^{-1} nicht existiert. Man hat daher entsprechend der obigen Fallunterscheidung \mathfrak{T} und \mathfrak{P} durch Setzung von $t_{44} = 1$ und $p_{43} = 0$ zu modifizieren. Jetzt bildet man

$|\mathfrak{P} - k\mathfrak{E}| = (k-3)(k^3 - 2k^2 - 8k + 12) = 0$ und errechnet zum Beispiel für $k=3$ zur Matrix \mathfrak{P} den Eigenvektor

$$y = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \text{ nun ist } x = \mathfrak{T}y, \text{ folglich: } \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} y$$

$$\mathfrak{T} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} x$$

Hier ist zufällig $x = y$

Hannover.

Sigurd Falk.

Ist eine Revision der Gewichtungskoeffizienten-Berechnung in der Methode der kleinsten Quadrate erforderlich?

(Eine Stellungnahme zum Einwand von
S. L. Piotrowski)

Kürzlich ist in einer amerikanischen Publikation¹⁾ der Nachweis geführt worden, daß die herkömmliche Berechnung des Gewichtes der Unbekannten in einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Linearumachung der Fehlergleichungen nach dem Satz von Taylor ein nur unvollkommenes Ergebnis liefert. An einem Beispiel wird dort gezeigt, daß die übliche Berechnung zu den Gewichten $p'_x = 1:0,20$ und $p'_y = 1:0,060$ für die Unbekannten x und y führt, während die genauen Werte $p_x = 1:0,09$ u. $p_y = 1:0,028$ betragen. Diese Abweichungen sind so beträchtlich, daß man die Frage stellen muß, ob z. B. bei den grundlegenden Aufgaben der Ingenieur-Geodäsie wie auch der staatlichen Vermessungstätigkeit, nämlich bei den trigonometrischen Punkteinschaltungen, die eines der Hauptanwendungsgebiete der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen darstellen, eine Revision der seitherigen Rechnungsmethoden notwendig wird, und wie diese dann wohl durchzuführen wäre.

I.

Zum besseren Verständnis soll zunächst der Grundgedanke von Piotrowski in etwas abgewandelter Form kurz umrissen werden: Zwischen den um v_i

verbesserten Beobachtungswerten L_i und den (zwei) Unbekannten x und y bestehen die Beziehungen

$$L_i + v_i = f^{(i)}(x, y), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1).$$

Mit der Zerlegung

$$\begin{matrix} x = x_0 + \Delta x, \\ y = y_0 + \Delta y \end{matrix} \quad (2),$$

worin x_0 und y_0 beliebig wählbare Näherungswerte sind, ergeben sich nach dem Satz von Taylor die folgenden Fehlergleichungen:

$$v_i = a_i \cdot \Delta x + b_i \cdot \Delta y + f_0^{(i)} - L_i \quad (3),$$

worin

$$a_i = \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x}; \quad b_i = \frac{\partial f^{(i)}}{\partial y}; \quad f_0^{(i)} = f^{(i)}(x_0, y_0) \quad (4).$$

Unter Benutzung der Gaußschen Summen-Symbole z. B.

$$[vv] \text{ für } \sum_{i=1}^n v_i^2$$

folgen aus

$$[vv] = \text{Minimum}$$

die Normalgleichungen

$$[av] = 0; \quad [bv] = 0 \quad (5);$$

oder

$$\begin{cases} [aa] \Delta x + [ab] \Delta y + [a(f_0 - L)] = 0 \\ [ab] \Delta x + [bb] \Delta y + [b(f_0 - L)] = 0 \end{cases} \quad (6).$$

Die Gewichte p_x und p_y der Unbekannten x und y sind bekanntlich

$$p_x = 1: [\alpha\alpha]; \quad p_y = 1: [\beta\beta] \quad (7a),$$

worin

$$\alpha_j = \frac{\partial x}{\partial L_j}, \quad \beta_j = \frac{\partial y}{\partial L_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7b).$$

Sieht man in (2) die x_0, y_0 als konstante Teile an, so erhält man aus (6):

$$\begin{cases} [aa] \cdot \frac{\partial \Delta x}{\partial L_j} + [ab] \frac{\partial \Delta y}{\partial L_j} = a_j \\ [aa] \alpha'_j + [ab] \beta'_j = a_j, \\ [ab] \cdot \frac{\partial \Delta x}{\partial L_j} + [bb] \frac{\partial \Delta y}{\partial L_j} = b_j \\ [ab] \alpha'_j + [bb] \beta'_j = b_j \end{cases} \quad (8).$$

oder

Nun denke man sich, um die Einflüsse der in (3) vernachlässigten Glieder zweiter und höherer Ordnung zu eliminieren, die Ausgleichung mehrfach wiederholt, indem die sich ergebenden Werte x, y immer wieder als neue Näherungswerte x_0, y_0 angesehen werden. Im Endzustand wird dann sein:

$$v_i = f^{(i)} - L_i = f_0^{(i)} - L_i \quad (9),$$

so daß aus (5):

$$[a(f-L)] = 0 \quad \text{und} \quad [b(f-L)] = 0 \quad (10).$$

Die Differentiation nach L_j liefert jetzt [im Hinblick auf (4)]:

$$\left\{ \begin{aligned} \{[aa] + [f_{xx}(f-L)]\} \frac{\partial x}{\partial L_j} + \{[ab] + [f_{xy}(f-L)]\} \frac{\partial y}{\partial L_j} &= a_j \\ \{[ab] + [f_{xy}(f-L)]\} \frac{\partial x}{\partial L_j} + \{[bb] + [f_{yy}(f-L)]\} \frac{\partial y}{\partial L_j} &= b_j \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

worin

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (12).$$

¹⁾ S. L. Piotrowski: Some remarks on the weights of unknowns as determined by the method of differential corrections. Proc. Nat. Acad. Sciences, Vol. 34, Nr. 2. Harvard Reprint, 304 (1948).

(11) geht in (8) über, wenn

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (f-L) \right] &= 0, & \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (f-L) \right] &= 0, \\ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (f-L) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13).$$

Falls (13) nicht erfüllt ist, dürfe zur Weiterrechnung nicht (8), sondern es müsse (11) verwendet werden. Soweit Piotrowski.

II.

Für die Weiterrechnung lösen wir (8) nach α'_j und β'_j auf; es ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_j &= \frac{1}{D} (a_j [b b] - b_j [a b]); \\ \beta'_j &= \frac{1}{D} (b_j [a a] - a_j [a b]) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

mit

$$D = [a a] [b b] - [a b]^2 \quad (15),$$

woraus

$$[\alpha' \alpha'] = \frac{[b b]}{D} = \frac{1}{p_x} \quad \text{und} \quad [\beta' \beta'] = \frac{[a a]}{D} = \frac{1}{q_y} \quad (16).$$

Ersetzen wir in (11):

$$\left. \begin{aligned} [A A] &= [a a] + [v f_{xx}], & [A B] &= [a b] + [v f_{xy}], \\ [B B] &= [b b] + [v f_{yy}] \end{aligned} \right\} \quad (17),$$

so hat man entsprechend (14):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j &= \frac{1}{D} (a [B B] - b [A B]) \\ \text{und} \\ \beta_j &= \frac{1}{D} (b [A A] - a [A B]) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

mit

$$\bar{D} = [A A] [B B] - [A B]^2 \quad (19).$$

Dann wird

$$\left. \begin{aligned} [\alpha \alpha] &= \frac{1}{\bar{D}^2} [a a] [B B]^2 + [b b] [A B]^2 - 2 [a b] [A B] [B B], \\ [\beta \beta] &= \frac{1}{\bar{D}^2} ([b b] [A A]^2 + [a a] B B^2 - 2 [a b] A B [A A]) \end{aligned} \right\} \quad (20).$$

Setzt man jetzt in (19) und (20) die Beziehungen (17) ein, und vernachlässigt man die Glieder von der Ordnung v^2 als kleine Größen gegenüber den v -Gliedern, so erhält man

$$\bar{D} = D + \Delta D, \quad \Delta D = [a a] [v f_{yy}] + [b b] [v f_{xx}] - 2 [a b] [v f_{xy}] \quad (21),$$

$$\left. \begin{aligned} [\alpha \alpha] &= \frac{D}{(D + \Delta D)^2} ([b b] + 2 [v f_{yy}]), \\ [\beta \beta] &= \frac{D}{(D + \Delta D)^2} ([a a] + 2 [v f_{xx}]) \end{aligned} \right\} \quad (22).$$

Mit der Bedingung (13) geht (22) wieder in (16) über. Mit einem hinreichenden Grade von Annäherung findet man für (22) auch:

$$\left. \begin{aligned} [\alpha \alpha] &= \frac{1}{D} \left(1 - 2 \frac{\Delta D}{D} \right) ([b b] + 2 [v f_{yy}]); \\ [\beta \beta] &= \frac{1}{D} \left(1 - 2 \frac{\Delta D}{D} \right) ([a a] + 2 [v f_{xx}]) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} [\alpha \alpha] &= [\alpha' \alpha'] + \frac{2}{D} ([v f_{yy}] - [\alpha' \alpha'] \Delta D); \\ [\beta \beta] &= [\beta' \beta'] + \frac{2}{D} ([v f_{xx}] - [\beta' \beta'] \Delta D) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Die in (24) an zweiter Stelle rechter Hand stehenden Ausdrücke geben somit die Korrekturbeträge $[\alpha \alpha] - [\alpha' \alpha']$, bzw. $[\beta \beta] - [\beta' \beta']$ für die Gewichtsreziproken an, die durch die Glieder höherer Ordnung verursacht werden.

III.

Im Falle des Vorwärtseinschneidens — um einen markanten Fall herauszugreifen — hat man

$$f(i) = \arctg \frac{y - y_i}{x - x_i} \quad (25),$$

worin x, y die Koordinaten des Neupunktes, x_i, y_i die der Festpunkte sind. L_i ist der auf (x_i, y_i) beobachtete Richtungswinkel φ_i nach dem Neupunkt (x, y) . Die Richtungskoeffizienten sind dann ²⁾

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{\partial f(i)}{\partial x} = - \varrho'' \frac{\sin \varphi_i}{s_i}; \\ b_i &= \frac{\partial f(i)}{\partial y} = + \varrho'' \frac{\cos \varphi_i}{s_i} \end{aligned} \right\} \quad (26),$$

worin

$$\left. \begin{aligned} s_i &= \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \\ \varrho'' &= \frac{180^\circ \cdot 3600}{\pi} \text{ (in Sek.)} \end{aligned} \right\} \quad (27).$$

Durch Differentiation von (26) ergibt sich ³⁾

$$\left. \begin{aligned} f_{xx} &= + \frac{2 \varrho''}{s^4} (x - x_i) (y - y_i) = + \varrho'' \frac{\sin 2\varphi}{s^2}, \\ f_{yy} &= - \frac{2 \varrho''}{s^4} (x - x_i) (y - y_i) = - \varrho'' \frac{\sin 2\varphi}{s^2}, \\ f_{xy} &= + \frac{\varrho''}{s^4} ((y - y_i)^2 - (x - x_i)^2) - \varrho'' \frac{\cos 2\varphi}{s^2} \end{aligned} \right\} \quad (28).$$

Damit erhält man aus (24) und (27) die folgenden Schlussformeln:

$$[\alpha \alpha] = [\alpha' \alpha'] + \frac{2}{D} (-\bar{D} - [\alpha' \alpha'] \Delta D) \quad (29),$$

$$[\beta \beta] = [\beta' \beta'] + \frac{2}{D} (+\bar{D} - [\beta' \beta'] \Delta D) \quad (30),$$

worin:

$$\left. \begin{aligned} A &= \left[v \cdot \varrho'' \frac{\sin 2\varphi}{s^2} \right] \quad \text{und} \\ \Delta D &= A ([b b] - [a a]) + 2 [a b] \left[v \cdot \varrho'' \frac{\cos 2\varphi}{s^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (31).$$

IV.

Wir wollen nun (29), (30), (31) auf das in O. Eggerts Handbuch der Vermessungskunde angegebene Beispiel ⁴⁾ des Vorwärtseinschneidens aus drei Festpunkten anwenden und entnehmen dort:

$$\begin{aligned} [a a] &= 74, [b b] = 86, [a b] = -2, \text{ so da\ss } D = 6360, \\ [\alpha' \alpha'] &= 1:74 = 0,01351; [\beta' \beta'] = 1:86 = 0,01163, \\ \varphi_1 &= 61^\circ 14'; \varphi_2 = 16^\circ 42'; \varphi_3 = 316^\circ 40', \\ v_1 &= +10''; v_2 = -13''; v_3 = +7''. \end{aligned}$$

Nach (28) ergeben sich der Reihe nach

$$\begin{aligned} \text{für } v \cdot f_{xx} &: +0,00212; -0,00149; -0,00216, \\ \text{für } v \cdot f_{xy} &: -0,00135; -0,00225; +0,00013. \end{aligned}$$

Damit wird: $\bar{D} = -0,00153$; $\Delta D = -0,00448$.

Hiermit erhält man für die Gewichtskoeffizienten

Seitherige Berechnung:	$[\alpha' \alpha'] = 0,01351$	$[\beta' \beta'] = 0,01163$
Korrektionsglied:	$[\alpha \alpha] - [\alpha' \alpha'] = +0,000001$	$[\beta \beta] - [\beta' \beta'] = -0,0000$
verbesserte Werte:	$[\alpha \alpha] = 0,01351$	$[\beta \beta] = 0,01163$

Die praktische Erprobung zeigt eindeutig, daß der Einwand von Piotrowski bei dem hier behandelten Fall des Vorwärtseinschneidens gegenstandslos ist. Die Korrektionsglieder bewegen sich hier in einer Größenordnung, die im Vergleich zu den Gewichtsreziproken keineswegs mehr diskutabel ist.

²⁾ Vgl. W. Jordan und O. Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. 1, S. 369ff. Stuttgart 1935.

³⁾ Vgl. H. Wolf: Zur Berechnung der nach dem Meßbalkenverfahren ermittelten Entfernungen. Mitt. Reichsanst. Landesaufn. (1936), S. 59—65.

⁴⁾ Wie ²⁾ S. 380—386.

Bei regelmäßigen, vollständig symmetrischen Bestimmungsfunktionen fällt die Bedingung (13) wegen (28) mit (10), bzw. mit (5), die automatisch nach einer Ausgleichung erfüllt sind, zusammen. Die vollkommene Symmetrie hat also ein Verschwinden jener Korrektionsglieder für die Gewichtsreziproken zur Folge. Sicherlich darf man annehmen, daß bei nur drei Bestimmungsstrahlen in der Praxis die Symmetrie am ehesten gestört wird, so daß bei mehr Bestimmungsstrahlen wahrscheinlich auch keine größeren Korrektionsbeträge als die oben berechneten zu erwarten sein dürften. Andererseits wachsen jene Korrekturbeträge aber auch mit der Messungsgenauigkeit, d. h. mit den v -Werten, an. Diese sind nun im obigen Beispiel durchaus nicht klein, so daß auch aus diesem Grunde keine wesentlich höheren Korrekturwerte zu befürchten sind. Aber selbst wenn diese bei abnorm asymmetrischen Figuren wider Erwarten einmal auf den 10- bis 100fachen Wert anwachsen sollten, sind sie bei trigonometrischen Einschaltungen so geringfügig, daß sie außer acht zu lassen sind, und es daher bei der seither geübten Berechnungsweise der Gewichtskoeffizienten verbleiben kann.

Was übrigens die theoretische Strenge der Ableitung von Piotrowski betrifft, so darf nicht übersehen werden, daß (7) im Grunde einer Entwicklung nach dem Satz von Taylor entspricht, die nur auf die linearen Glieder beschränkt ist.

Frankfurt/M.

H. Wolf.

Beweis der Vektorformel

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c) b - (a \cdot b) c$$

Zum Beweis genügt es, anzunehmen, daß b, c linear unabhängig sind. Klar ist, daß eine Beziehung der Form gilt

$$a \times (b \times c) = \lambda b + \mu c \quad \dots (1).$$

Wir betrachten jetzt die folgenden Vektoren:

$$b, c, b \times c, \underbrace{c \times (b \times c)}_{c^*}, \\ \underbrace{(b \times c) \times [c \times (b \times c)]}_{\mathfrak{C}}.$$

von denen je drei aufeinanderfolgende ein Rechtsdreiein bilden; das zweite beginnend mit c ist überdies orthogonal, und daher auch das dritte, woraus folgt $\mathfrak{C} = qc$ mit $q > 0$, und genauer $\mathfrak{C} = (b \times c)^2 \cdot c$. Ferner ist

$$b \cdot c^* = b \cdot \{c \times (b \times c)\} = (b \times c)^2.$$

Multiplizieren wir also (1) links und rechts skalar mit c^* , so ergibt sich

$$\underbrace{c^* \cdot \{a \times (b \times c)\}}_{c^* \cdot a \cdot (b \times c)} = \lambda \underbrace{c^* \cdot b}_{b \cdot c^*} \\ = a \cdot \{(b \times c) \times c^*\} = (b \times c)^2 \\ = (a \cdot c) (b \times c)^2$$

d. h. $\lambda = (a \cdot c)$. Vertauschung von b und c ergibt analog $\mu = -(a \cdot b)$.

Berlin-Charlottenburg.

E. Mohr.

BUCHBESPRECHUNGEN

B. L. van der Waerden (Prof. a. d. Univ. Amsterdam), *Moderne Algebra*. Unter Benutzung der Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Erster Teil. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band XXXIII.) 3. Aufl. VIII + 292 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis brosch. 24,— DM, geb. 27,— DM.

Das Buch bietet eine glückliche Synthese der klassischen Algebra mit den modernen Begriffen der Gruppen-, Körper-, Bewertungs- und Idealtheorie sowie der Theorie der hyperkomplexen Zahlen. Die Darstellung ist klar und für die Einführung mit großem Geschick abgefaßt. Die drei ersten Kapitel dienen der Vorbereitung und enthalten die Grundbegriffe über Mengen, Gruppen, Ringe, Körper und Ideale. Dem schließt sich wesentlich die Theorie der kommutativen Körper an; sie wird bis zum Begriff der Bewertung eines Körpers geführt. Zahlreich eingestreute Aufgaben unterstützen die Probe auf das Verständnis des Textes.

Dresden.

Draeger.

Dr. H. Hasse (o. Prof. a. d. Humboldt-Univ. Berlin), *Vorlesungen über Zahlentheorie*. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band LIX.) XII + 474 S. mit 28 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis 42,— DM, geb. 45,— DM.

Das Buch folgt der im Vorjahre erschienenen „Zahlentheorie“ des Verfassers. Die im Vorwort erwähnte Frage nach der Existenzberechtigung dieses neuen Werkes möchte ich nach einer anderen Richtung ergänzen: Die „Vorlesungen“ füllen eine wesentliche Lücke in der vorhandenen Lehrbuchliteratur aus, insofern sie in die „elementare“ Zahlentheorie in leicht faßlicher Form die modernen Begriffe der Gruppe und des Ringes einführen (Abschn. I u. II). Dadurch werden vielfach erhebliche Vereinfachungen

der Beweise erzielt. Der III. Abschnitt bringt eine geradezu glänzende Analyse des berühmten Dirichletschen Primzahlsatzes, und an ihn schließt sich in engem innerem Zusammenhang eine Theorie der quadratischen Zahlkörper an, deren Fassung wiederum eine moderne Zusammenschau der Probleme ermöglicht. An Vorkenntnissen in mathematischalgebraischer Hinsicht werden wesentlich nur die Grundlagen der Algebra vorausgesetzt. Auf die vielen Einzelvorzüge des Werkes einzugehen, ist in diesem Rahmen unmöglich. Dem Interessenten an dieser reinsten Mathematik kann nur wärmstens empfohlen werden: Nimm und lies!

Dresden.

Draeger.

Dr.-Ing. Lothar Cremer (Dozent a. d. Univ. München), *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik*, Band III. Wellentheoretische Raumakustik. XIV + 355 S. mit 87 Abb. Leipzig 1950. S. Hirzel-Verlag. Preis geb. 21,50 DM.

Es handelt sich um den III. Teil eines zusammenfassenden Werkes des Verfassers über „die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik“. Während der I. Teil von den anschaulichen Darstellungen der Experimentalphysik über die Wellenausbreitung ausgeht und die Einflüsse der geometrischen Raumform aufzeigt (Echo, Schallkonzentrationen und ihre psychologische Wirkung) und der II. (noch nicht erschienene) Teil aus statistischen Betrachtungen die Nachhallerscheinungen und Materialeinflüsse ableiten wird, geht der III. Teil von einer strengen Formulierung der Schallwellentheorie aus. Er dürfte damit den Mathematiker am meisten interessieren. Zunächst werden die Schallfeldgleichungen abgeleitet. Von dieser Grundlage ausgehend werden dann die raumakustischen Probleme behandelt, die ohne höhere Mathematik nicht dargestellt werden können: mit-schwingende Wände und Raumresonanzen mit ihrer Anwendung in einfacher zu übersiehenden Räumen, im Rohr, im Trichter, im Rechteckraum, in der

Flachkammer zur Messung der Schallschluckung, auch bei schrägem Einfall und durch parallel zur Ausbreitung laufende Schluckflächen. Zum Schluß wird die Schallabsorption durch innere Reibung und Wärmeleitfähigkeit der Luft sowie durch Anregung von Molekülschwingungen untersucht. Durch seine allgemeine Grundlage wird sich das Buch weit über den Rahmen der speziell interessierten Fachwelt, besonders auch bei den technisch interessierten Physikern Freunde erwerben.

Dresden.

Reichardt.

C. Truesdell, An essay toward a unified theory of special functions based upon the functional equation $\frac{\partial}{\partial z} F(z, \alpha) = F(z, \alpha + 1)$. (Annals of Mathematics Studies Number 18.) IV + 182 S. Princeton 1948. Princeton University Press. Preis 3,— \$.

Die vertrauten speziellen Funktionen $f(y, \alpha)$ der angewandten Mathematik besitzen eine Fülle funktions-eigener und verknüpfender Beziehungen, die ihre Gestalt auf einen tieferen Zusammenhang hinweisen. Seine Quelle erkennt der Verfasser in der gemeinsamen Differenzen-Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial y} f(y, \alpha) = A(y, \alpha) f(y, \alpha) + B(y, \alpha) f(y, \alpha + 1).$$

Ist weiter die Koeffizientenbedingung

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [A(y, \alpha + 1) - A(y, \alpha) + \frac{\partial}{\partial y} \ln B(y, \alpha)] = 0$$

erfüllt, dann lassen sich, wie Truesdell zeigt, aus den Koeffizienten die Funktionen $p(y, \alpha)$ und $q(y) = z$ so bestimmen, daß $p(y, \alpha) f(y, \alpha) = F(z, \alpha)$ der im Buchtitel angegebenen, schon vielfach untersuchten koeffizientenfreien Funktionalgleichung genügt. Von ihren Lösungen ausgehend gelangt man je nach Wahl des Anfangswertes $F(z, \alpha)$ und der Koeffizienten durch Rücktransformation zu den Funktionen $f(y, \alpha)$ samt ihren Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen. Hierdurch gewinnt die Theorie der speziellen Funktionen eine bewundernswerte Einheitlichkeit und Durchsichtigkeit; daß sie auch bisher unbekannte Beziehungen aufdeckt, belegt der Verfasser mit eindrucksvollen Beispielen.

Dresden.

P. E. Böhm.

Dr. R. Jaekel (apl. Professor a. d. Universität Bonn) unter Mitarbeit von Dr. H. Schwarz und Dr. E. Schüller, Kleinste Drucke, ihre Messung und Erzeugung. X + 302 S. m. 301 Abb. Berlin, München 1950. Springer-Verlag und J. F. Bergmann. Preis geh. 39,60 DM.

Der Verfasser gliedert seine Darstellung in sechs Hauptteile: Kinetische Gastheorie; Vakuum-Meßinstrumente; Pumpen; Erzeugung, Erhöhung und Aufrechterhaltung des Vakuums ohne Pumpen; Vakuum-Verbindungen und -Leitungen; Vakuum-zubehör.

Der erste Teil gibt eine Zusammenstellung von Formeln der kinetischen Theorie der Gase, die in den folgenden Abschnitten gebraucht werden. Die nächsten drei Abschnitte über Vakuum-Messung- und -Erzeugung bilden den Kern des Buches und haben auch im Umfang das größte Gewicht. Hier sind die Geräte und Verfahren beschrieben und ihre Wirkungsweise durch zum Teil ausführliche Rechnungen im einzelnen theoretisch untersucht. Die beiden letzten Abschnitte geben praktische Hinweise für den Aufbau von Vakuumapparaturen. Sie bilden eine Ergänzung zu den vorherigen Kapiteln und geben dem Werk den Charakter eines allgemeinen Hilfsbuches der Hochvakuumtechnik, da der im Untertitel des

Buches erläuterte Umfang der Darstellung in diesen Abschnitten überschritten wird. Besonders hervorzuheben ist, daß zahlreiche, auch ausländische Neuentwicklungen dargestellt worden sind. Ein vielseitiges Literaturverzeichnis ist beigegeben. Das Erscheinen dieses Buches ist sehr zu begrüßen, um so mehr, als zusammenfassende deutsche Darstellungen über die Hochvakuumtechnik längere Zeit vergriffen waren.

Dresden.

Recknagel.

Mathematisch-physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhanges von Schule und Universität, herausgeg. von H. Behnke, Münster und W. Lietzmann, Göttingen in Verbindung mit dem math. Forschungsinstitut in Oberwolfach. Bd. 1, 318 S. Göttingen 1949/50. Vandenhoeck und Ruprecht. Preis 19,60 DM (Subskriptionspreis 17,— DM).

Zum Geleit für das Neuerscheinen dieser Semesterberichte sagt H. Behnke: „Den Lehrern der Mathematik und der verwandten Wissenschaften an den höheren Schulen soll unser Bemühen um diese Blätter in erster Linie gewidmet sein“. Der „Gymnasiallehrer als Mittler zwischen der Forschung und dem Leben der geistig und fachlich interessierten Schichten unseres Volkes“ soll durch die Berichte über den Fortgang der Forschung auf dem laufenden gehalten werden.

Die Wiederaufnahme dieser hier durch Berichte und dort durch Ferienkurse geübten Tradition kann nicht warm genug begrüßt werden. Was immer schon galt, ist heute angesichts der Lage und auch der Forderungen der Gegenwart womöglich in erhöhtem Maße wahr. Der Lehrer, der es mit seinem Berufe ernst nimmt, kann um der letzten und höchsten Unterrichtserfolge willen in seiner Fachwissenschaft gar nicht weit und tief genug verankert sein. Daraus folgt die Notwendigkeit der entsprechenden Studienpläne ebenso wie diejenige seines wissenschaftlichen Weiterarbeitens auch nach dem Studium. Ihm dafür fortlaufend geeignete Handreichungen und Anregungen zu bieten, ist darum ebenfalls ein Erfordernis.

Entspricht der Inhalt der vorliegenden Semesterberichte dem? Diese Frage ist unbedingt zu bejahen, und den Berichten daher weiteste Verbreitung zu wünschen. Der Inhalt ist denkbar vielseitig, und den meisten Aufsätzen sind weiterführende Literaturangaben hinzugefügt. Der Inhalt erstreckt sich von der Darstellung mengentheoretischer Probleme bis zu einem Aufsatz über mathematische Geräte und umfaßt zugleich mehrere Artikel über die moderne Physik. Beiträge über F. Klein, Toeplitz, Bavinck und „Goethe und die Mathematik“ ergänzen den sachlichen Inhalt nach der persönlichen Seite — für den Lehrer von besonderem Werte, zumal wenn dabei, wie in dem Aufsatz über „Goethe und die Mathematik“, zugleich Einsichten in das Wesen der Mathematik und in mathematische Strukturprobleme vermittelt werden.

Die Darstellung ist zumeist konzentriert knapp. Mitunter — ich nenne als Beispiel den Beitrag von Hermes über die Funktionsanalyse — wäre eine etwas ausführlichere Darstellung wünschenswert gewesen. Nicht als negative Kritik — ein erster Band kann ja nicht schon alles bringen! —, sondern als Anregung und Wunsch für die Fortsetzung des Unternehmens sei noch ausgesprochen, daß die verschiedenen Anwendungsbereiche der Mathematik hinreichend berücksichtigt und daß dabei Anwendbarkeit sowie wechselseitige Beziehungen zwischen Theorie und Anwendung klargestellt werden. Der Aufsatz über mathematische Geräte enthält dafür wertvolle Fingerzeige.

Dresden.

M. Draeger.

C. Zwikker (Technical Director Light Division Philips Eindhoven), *Advanced Plane Geometry*. XII + 299 S. m. 273 Abb. Amsterdam 1950. North-Holland Publishing Company.

Verf. bietet einen Gesamtüberblick über alle Gebiete der Geometrie, die irgendwie für die Anwendung in der Technik wichtig werden können, also analytische, projektive, algebraische, Differentialgeometrie, Fragen der Potentialtheorie, der Kinematik. Im Einzelnen betrachtet er aus der projektiven Geometrie die Eigenschaften von Punktreihe und Strahlenbüschel, Dualität, die Schnittpunktsätze; aus der Dreieckslehre den Fragenkreis des Feuerbachschen Kreises; vom Kreise die Kreisverwandtschaften und die projektive Erzeugung des Kreises, jedoch keine Büscheltheorie. Aus der algebraischen Geometrie werden Polareigenschaften und -verwandtschaft, sowie eine Theorie der Kurven 3. Ordnung mit Hilfe der elliptischen Funktionen behandelt. In der Theorie der Kegelschnitte beschränkt sich Verf. auf die metrischen und affinen Eigenschaften des einzelnen Kegelschnittes und geht dabei ausführlich auf kinematische Eigenschaften und die Keplerbewegung ein. Aus der Differentialgeometrie behandelt er Evoluten und Evoluten, Enveloppen, Fußpunktskurven, Kustiken. Orthogonale Trajektorien einer Kurvenschar behandelt er hauptsächlich im Hinblick und in Anwendung auf Potentialtheorie. Ein Kapitel bringt unstetige und geknickte Kurven, in erster Linie als Grenzkurven in einer Kurvenschar, in diesem Zusammenhang die Schwarzsche Polygonabbildung. Im einzelnen geht er dann noch auf die Spiralen, Lemniskaten, Radlinien, Konchoiden ein. Ein Kapitel über Zahnprofile von Zahnrädern bildet den Schluß. In jedem Kapitel wird die Kraft der erarbeiteten Methoden an schönen Anwendungen auf die Elektrotechnik, Kinematik u. ä. erprobt, die auch mathematisch äußerst reizvoll sind.

Überraschend ist die Darstellung. Verf. faßt die Ebene durchweg als Wertebereich einer komplexen Veränderlichen auf und stellt jede Kurve durch eine komplexe Funktion eines reellen Parameters dar. Die komplexen Zahlen bieten alle Vorzüge der Vektorrechnung; sind aber schmiegsamer. Freilich muß Verf. dann in der Projektiven Geometrie auf die Benutzung homogener Koordinaten verzichten.

In seinen Voraussetzungen und Anforderungen will das Buch eine mittlere Lage einnehmen. Die Elemente der Infinitesimalrechnung und der analytischen Geometrie, wie sie bei uns etwa in den beiden ersten Studiensemestern gelehrt werden, werden vorausgesetzt, um für eine Fülle feinerer Eigenschaften der Figuren Platz zu gewinnen. Andererseits verbietet schon der weite Rahmen, in den einzelnen Gebieten zu weit den feinsten Verästelungen zu folgen; es wird dann immer auf Spezialwerke verwiesen. Das Buch wendet sich wohl in erster Linie an den angehenden Ingenieur, dem die mathematische Denk- und Ausdrucksweise bereits etwas vertraut ist. Dieser wird darin wohl alles finden, was ihm die Geometrie für seine Arbeit zu bieten vermag. Umgekehrt lernt der Mathematiker aus dem Buch eine Fülle von Beziehungen seiner Wissenschaft zur Technik. Eine verständliche Darstellungsweise und eine große Zahl von sehr anschaulichen Figuren machen das Studium des Buches zu einer Freude.

Dresden.

Ott-Heinrich Keller.

A. Schmidt (Prof. a. d. Univ. Göttingen), *Mathematische Grundlagenforschung. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendung*. Band I, 1, Heft I, Teil II, 48 S. Leipzig 1950. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geh. 5,60 DM.

Auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Zürich 1932 wurde beschlossen, die Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften neu herauszugeben aber ohne die Abschnitte aus der angewandten Mathematik. Diese sollten später in einem besonderen Werk

zusammengefaßt werden. Zuerst wurde unter der Betreuung der Professoren Hasse und Hecke die Neubearbeitung des ersten am meisten veralteten Bandes „Algebra und Zahlentheorie“ in Angriff genommen. Leider waren die Zeitverhältnisse dem Unternehmen nicht günstig. Erst jetzt erscheint als erstes Heft dieses Bandes der Abschnitt über „Mathematische Grundlagenforschung“, der von A. Schmidt bereits im Jahre 1939 geschrieben wurde, der aber durch meist kenntlich gemachte Einschaltungen die Entwicklung in den letzten zehn Jahren, auch die im Ausland berücksichtigt. In diesem ersten Artikel scheint es dem Verfasser gelungen zu sein, die doppelte, nicht leichte Aufgabe der Enzyklopädie zu erfüllen, nämlich: dem Fachmann eine zuverlässige Übersicht über Inhalt und besonders über die neuere Literatur des Gebietes zu geben und außerdem denen, die nur über eine gewisse mathematische Allgemeinbildung verfügen eine überschlägige Kenntnis des Gebietes zu vermitteln. Dadurch, daß den Herausgebern auch dieses Mal ein internationaler Mitarbeiterstab für die einzelnen Sachgebiete zur Verfügung steht, ist höchste Zuverlässigkeit auch in dieser neuen Auflage gewährleistet. Man kann nur wünschen, daß das Werk dieses Mal in kürzerer Zeit abgeschlossen werden möchte als seiner Zeit die erste Auflage.

Dresden.

Willers.

W. Blaschke, *Einführung in die Differentialgeometrie*. (Grundlehren der Math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. LVIII.) VII + 146 S. mit 57 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis brosch. 16,— DM., geb. 18,60 DM.

Verf. gibt auf knappstem Raum eine umfassende Darstellung der metrischen Differentialgeometrie des Raumes. Er beginnt nicht mit der Kurventheorie, sondern behandelt die Kurven von vornherein als Träger von Streifen. Krümmung, Windung, Frenetsche Formeln erscheinen als Spezialfälle von Streifenformen und -formeln. In der Flächentheorie stellt er die inneren Eigenschaften und die geodätischen Linien voran und bringt dann erst die äußere Flächenlehre. — Als Hilfsmittel benutzt er nicht, wie man sonst gewohnt ist quadratische, sondern im Anschluß an Cartan lineare Pfaffsche Differentialformen. Dadurch und durch ausgiebige Benutzung symbolischer Schreibweisen gewinnen die Formeln eine überraschende Kürze und Durchsichtigkeit, selbst solche wie die für die Gaußsche Krümmung, die von Gauß-Codazzi usw.

So ist das Buch für den reifen Mathematiker, der etwa den Inhalt des 1. Bandes der berühmten Blaschkeschen Werke über Differentialgeometrie beherrscht, ein Wegweiser zu einer wesentlichen Vertiefung seiner Einsichten und ein Genuß.

Noch eine Frage: Auf S. 104 wird der „hervorragende jüdische Zahlentheoretiker und Geometer Minkowski“ erwähnt. Muß man in Deutschland wirklich schon wieder nach der Abstammung eines Gelehrten fragen?

Dresden.

Ott-Heinrich Keller.

G. Bol, *Projektive Differentialgeometrie I*. (Math. Lehrbücher, herausgeg. vom Math. Forschungsinstitut Oberwolfach unter Leitung von Prof. Dr. W. Süss Bd. IV.) VII + 365 S. m. 15 Abb. Göttingen 1950. Vandenhoeck u. Ruprecht. Preis brosch. 17,80 DM., geb. 20,— DM.

Die projektive Differentialgeometrie behandelt diejenigen differentialgeometrischen Eigenschaften der Figuren, die gegenüber projektiven Abbildungen invariant sind. Sie wurde hauptsächlich in den letzten 50 Jahren in Amerika, Italien, Japan gepflegt. Das Buch ist das erste Lehrbuch in deutscher Sprache. Dieser I. Bd. bringt die projektive Differentialgeo-

metrie der ebenen Kurven, dann, nach einer Einführung in die räumliche projektive Geometrie, die Liniengeometrie und in die Lehre von den Asymptotenlinien die Theorie der Raumkurven und Flächenstreifen. Der II. Bd. soll dann die Flächentheorie behandeln. Mehrdimensionale Fragen liegen bis auf gelegentliche Hinweise außerhalb des Blickfeldes. Beim Aufbau umgeht Verf. die Normierungsfrage, die sich offenbar nicht ungekünstelt behandeln läßt. Dafür richtet er seine Definitionen so ein, daß sie sich bei Parameter-Transformationen möglichst einfach verhalten. In einem Anhang sind die benötigten Sätze und Formeln aus anderen Gebieten, z. B. Differentialgleichungen, zusammengestellt. Einem vertieften Studium werden durch ein umfassendes Literaturverzeichnis der Arbeiten von 1931–1950 (seit dem Lehrbuch von Fubini-Čech) die Wege geebnet.

Die Darstellung ist so gehalten, daß ein Student der Mathematik der mittleren Semester ohne große Anstrengung folgen kann. Kenntnisse der klassischen Differentialgeometrie und der projektiven Geometrie werden nicht vorausgesetzt, wohl aber ein gewisses Vertrautsein mit und ein Geschmack an deren Fragestellungen. Es ist zu hoffen, daß das Buch die Kenntnis seines Gegenstandes auch in Deutschland allgemein verbreiten und für seine eigentümlichen Schönheiten Freunde und Mitarbeiter werben wird.

Dresden.

Ott-Heinrich Keller.

Dr. Wilhelm Maack (apl. Prof. a. d. Univ. Hamburg), *Differential- und Integralrechnung. Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften, herausgeg. v. Dr. Henry Pöltz*, 235 S., m. 17 Abb. Wolfenbüttel und Hannover 1949. Wolfenbütteler Verlagsanstalt G. m. b. H.

Der Verf. beabsichtigt mit diesem Buch, „den Leser in großen Zügen mit den Methoden und Fragestellungen der Differential- und Integralrechnung bekannt zu machen. Es wird genau so viel geboten, wie unerlässlich scheint, dem Lernenden Grund und Boden unter die Füße zu geben“. Man darf sagen, daß das hierdurch gesteckte Ziel durchaus erreicht wurde. Der Leser wird in lebendiger Weise zum abstrakten analytischen Denken geführt, ohne ihn etwa durch den Zwang, alles in möglichst weitgehender Allgemeinheit zu betrachten, zu ermüden. — Der erste Teil behandelt die Funktionen einer Variablen. Es wird von der reellen Zahl als etwas Gegebenem ausgegangen; nach Einführung des Funktionsbegriffs und der Behandlung des Grenzwertes von Zahlenfolgen und Funktionen folgen Stetigkeit und differenzierbare Funktionen. Hieran schließt sich, nach einem Exkurs über unendliche Reihen das Riemannsche bestimmte Integral und der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, wobei man sich bei der Berechnung unbestimmter Integrale auf solche rationaler Funktionen beschränkt. Der zweite Teil behandelt Differential- und Integralrechnung von Funktionen zweier Veränderlichen bis zum Gaußschen Integralsatz unter den üblichen vereinfachenden Annahmen. — Eine Reihe netter Kleinigkeiten in der Darstellung und den Beweisen wird auch dem fortgeschrittenen Leser Neues bieten.

Dresden.

Maruhn.

Wilhelm Maack (Prof. a. d. Univ. Hamburg), *Fastperiodische Funktionen. (Die Grundlagen der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellung mit bes. Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Bd. LXI.) VII + 214 S.* Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis brosch. 21,60 DM., geb. 24,60 DM.

In den Jahren 24 bis 26 schuf H. Bohr seine Theorie der fastperiodischen Funktionen. Es sind dies solche reelle oder komplexe Funktionen der reellen Variablen x , die erstens einmal zu jedem vorgeschriebenen $\varepsilon > 0$ eine Fastperiode τ besitzen, für

die also und zwar für jedes x die Ungleichung $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$ gilt, für die es aber zweitens, weil das sonst zu vage wäre, zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $L(\varepsilon)$ gibt, so daß in jedem Intervall der Länge L eine Fastperiode enthalten ist. Diese Funktionen lassen sich durch endliche trigonometrische Reihen beliebig genau gleichmäßig approximieren. Die Bedeutung der Theorie für die Praxis liegt damit auf der Hand. Es ist daher dem Verf. zu danken, daß er die Theorie dieser Funktionen, die er jetzt eigentlich fastperiodisch nennt, besonders und unabhängig im vierten Kapitel dargestellt hat. Die Theorie ist nämlich seit Bohr erheblich erweitert worden. Ihre Grundlage ist der Begriff der Gruppe in der heutigen Fassung als einer Menge von Operationen, für die eine assoziative Multiplikation existiert. Daher beginnt das vorliegende Buch mit den Darstellungen endlicher Gruppen, um dann im zweiten Kapitel die abstrakte Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Gruppen anzuschließen. Von dieser allgemeinen Theorie aus ist dann der Übergang zu Sonderfällen verhältnismäßig einfach, so zu den periodischen Funktionen auf der ebenen Drehungsgruppe, zu den eigentlichen fastperiodischen Funktionen auf der Gruppe der reellen Zahlen und endlich zu den Kugelfunktionen auf der räumlichen Drehungsgruppe. Dieses siebente und letzte Kapitel bedarf im vorhergehenden Kapitel noch einer tiefgründigen Untersuchung über kompakte Gruppen. Im Anhang finden sich Literaturhinweise mit einer historischen Darstellung der Entwicklung der Theorie. Dieser Anhang wie auch die Einleitungen zu den einzelnen Kapiteln sind in einer besonders angenehm lesbaren Form geschrieben, was das Verständnis der recht schwierigen Theorie erheblich erleichtert. Ref. erfreut es zu sehen, daß seine Untersuchung über eine Basis aller Zahlen usw. schon so historisch geworden ist, daß man sie ohne Nennung seines Namens vortragen kann, was S. 87 und 88 geschieht.

Landshut.

H a m e l.

W. Lietzmann (Prof. a. d. Univ. Göttingen), „Wo steckt der Fehler?“ *Mathematische Trugschlüsse und Warnzeichen*. 183 S. mit 120 Abb. Leipzig 1950. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. 5,40 DM.

Das kleine Bändchen erschien zum ersten Mal im Jahre 1913 in der von Lietzmann und Witting herausgegebenen Mathematischen Bibliothek in einem Umfang von 57 Seiten. Von Auflage zu Auflage nahm der Umfang, besonders dank der Mitarbeit der Leser, zu. In der vorliegenden ist den beiden Abschnitten „Täuschungen und Fehlschlüsse“ und „Trugschlüsse“ ein neuer „Warnzeichen aus der Analysis des Unendlichen“ hinzugefügt worden. Der Inhalt des Bändchens ist Unterhaltungsmathematik im besten Sinne des Wortes. Natürlich sind nicht alle Beispiele gleichwertig; aber es findet sich viel vortreffliches darunter. Durch Verwendung manches dieser Beispiele wird man Unterricht oder Vorlesung anregender gestalten können. Die sorgfältige Durcharbeitung ist eine ausgezeichnete Schulung des logischen und mathematischen Denkens. Möchte es in recht viele Hände kommen.

Dresden.

Willers.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Herausgegeben von Prof. Dr. H. Brandt (Halle) und Prof. Dr. E. Kamke (Tübingen). Bd. 54 Heft 1. 54 u. 18 S. Bielefeld 1950. Verlag für Wissenschaft und Fachbuch. Preis: 12,75 DM., für Mitglieder der DMV. 8,50 DM.

Als eine der letzten deutschen mathematischen Vorkriegszeitsschriften hat jetzt nach dem Neuaufbau der Deutschen Mathematiker-Vereinigung auch der Jahresbericht der DMV. sein Erscheinen wieder aufgenommen. Er wird jetzt von Prof. Dr. Brandt-Halle und Prof. Dr. Kamke-Tübingen herausgegeben und soll in der

alten Weise fortgeführt werden. Er hat daher wie früher zwei Teile: „Berichte und Abhandlungen“ und „Kleinere Mitteilungen“. Bd. 54 wird in zwei Heften von insgesamt neun Bogen erscheinen. Das vorliegende erste Heft bringt im ersten Teil eine Gedenktafel für die seit 1933 verstorbenen deutschen Mathematiker. Es folgen vier Abhandlungen. Am Schluß des zweiten Teiles ist ein Verzeichnis der augenblicklichen Mitglieder gegeben. Hoffen wir, daß die Bände bald wieder im alten Umfang erscheinen können.

Dresden.

Willers.

F. Hund (o. Professor an der Universität Jena), Einführung in die theoretische Physik. IV. Band: Theorie der Wärme (Meyers kleine Handbücher, Bd. 54/55). 330 S. mit 46 Abb. Leipzig 1950. Bibliographisches Institut. Preis 5,80 DM. V. Band: Atom- und Quantentheorie (Meyers kleine Handbücher, Bd. 56/57). 314 S. mit 48 Abb. Leipzig 1950. Bibliographisches Institut. Preis 5,80 DM.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

Die beiden letzten Bändchen der theoretischen Physik von **Hund** stehen insofern in engerer Beziehung, als der vierte Band nicht nur die phänomenologische Thermodynamik enthält, sondern auch schon die statistische Theorie der Wärme in den Grundzügen behandelt. Ferner wird die Theorie der Wärmestrahlung gebracht, wobei die Quantenhypothese eingeführt werden muß. Im fünften Band wird hierauf zunächst noch einmal eingegangen, wo das Versagen der klassischen Theorie bei Fragen des Atombaues besprochen wird. Es folgt dann die ältere Quantentheorie, die mit dem Korrespondenzprinzip arbeitet, und schließlich die moderne Quantenmechanik. Dem Charakter einer Einführung entsprechend sind manche Gebiete verhältnismäßig kurz dargestellt. Auffällig ist dies in den Abschnitten über die statistische Theorie der Wärme, die sehr wenig Anwendungen enthalten. Die Darstellung der Atomphysik ist ausgezeichnet durch vorbildliche Klarheit. Dieses wohldurchdachte Bändchen zu studieren bereitet Genuß.

Dresden.

Recknagel.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

Dr. J. Horn (ehem. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Darmstadt). Partielle Differentialgleichungen. (Göschens Lehrbücherei Gr. I, Bd. 14.) Vierte, unveränderte Auflage. 228 S. mit 8 Abb. Berlin 1949. Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 14,— DM.

Suter-Traub, Die Methode der Festpunkte. Dritte, neubearbeitete Auflage, XII + 216 S. mit 232 Abb. und 7 Tafeln. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951. Springer-Verlag. Preis geb. 21,— DM.

Dr. H. Küstner, Fünfstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und der Winkelfunktionen bei dezimalgeteiltem Altgrad. Anhang physikalisch-

technische Tabellen. VI + 157 S. Berlin-Leipzig 1950. Volk- und Wissen-Verlag.

Dr.-Ing. Hans Mahl und **E. Götz**, Elektronenmikroskopie (Die kleinen Studienbücher, Band 58). 179 S. mit 39 Abb. und 5 Tafeln. Leipzig 1951. Bibliographisches Institut. Preis kart. 5,80 DM.

Dr. A. P. Speiser, Entwurf eines elektronischen Rechengengerätes unter besonderer Berücksichtigung der Erfordernisse eines minimalen Materialaufwandes bei gegebener mathematischer Leistungsfähigkeit. (Mitteilungen aus dem Institut für angew. Math. a. d. E. T. H. in Zürich). 54 S. mit 4 Abb. und 4 Tabellen. Zürich 1950.

NACHRICHTEN

Darmstadt: Dr. rer. nat. W. Schöbe, Prokurist bei der Allianz-Lebensversicherung A.G., in Stuttgart, erhielt die *venia legendi* für Mathematik.

Dr.-Ing. habil. Theodor Zech, Studienassessor an der Odenwaldschule in Hambach wurde nach seiner Rückkehr aus der Kriegsgefangenschaft erneut als Privatdozent zugelassen.

Dr.-Ing. H. Buchholz, früher Dozent an der Techn. Hochschule Berlin-Charlottenburg und wissenschaftlicher Mitarbeiter der AEG, jetzt wissenschaftlicher Mitarbeiter am Post- und Fernmeldetechnischen Zentralamt Darmstadt, erneuerte seine *venia legendi* jetzt an der Techn. Hochschule Darmstadt und wurde kurz darauf zum nichtplanmäßigen Professor ernannt.

Dr. rer. nat. H. Söhngen, früher wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt Berlin, zuletzt in Frankreich in der Industrieforschung tätig, erhielt die *venia legendi* für Mathematik.

Der nichtplanmäßige Professor für technische Mechanik, **Dr.-Ing. H. Dietz** ging unter Beibehaltung seiner *venia legendi* als wissenschaftlicher Mitarbeiter an die MAN Mainz-Gustavsburg über.

Freiburg i. Br.: Dr. H. Görtler, o. Prof. für angew. Math. a. d. Univ. Freiburg wurde zum Mitglied des Institute of Mathematical Statistics in Ann Arbor, Michigan USA ernannt.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Zu H. Holstein. Über die äußere und innere Reibungsschicht bei Störungen laminarer Strömungen. Z. angew. Math. Mech. 30 (1950) S. 25—49.

Ein vor kurzem in dieser Zeitschrift veröffentlichter Artikel von H. Holstein [1] enthält Einwände gegen einige der Ergebnisse, welche die Verfasser der vorliegenden Zuschrift in ihren Arbeiten [2] und [3]

veröffentlicht haben. Es scheint den Verfassern, daß diese Kritik im wesentlichen auf einem Mißverständnis beruht. Diese Zuschrift soll dem Zweck dienen, dieses Mißverständnis aufzuklären.

Wir rekapitulieren zunächst ganz kurz diejenigen Punkte der klassischen Stabilitätstheorie, in bezug auf welche Holstein und die Verfasser anscheinend übereinstimmen.

Die grundlegende Differentialgleichung für kleine periodische Störungen einer ebenen, parallelen Strömung,

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(4)} - 2\alpha^2 \Phi'' + \alpha^4 \Phi \\ - i\alpha R \{ (U(y) - c) (\Phi'' - \alpha^2 \Phi) - U'' \Phi \} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

kann für große Werte von αR auf zwei wesentlich verschiedene Weisen gelöst werden. Es existiert erstens ein Fundamentalsystem $\Phi_i(y, \alpha R)$, ($i = 1, \dots, 4$), das asymptotisch für $\alpha R \rightarrow \infty$ die Form

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(y, \alpha R) &\sim \varphi_1(y) \\ \Phi_2(y, \alpha R) &\sim \varphi_2(y) \\ \Phi_3(y, \alpha R) &\sim e^{\sqrt{\alpha R} Q(y)} \sigma(y) \\ \Phi_4(y, \alpha R) &\sim e^{-\sqrt{\alpha R} Q(y)} \sigma(y) \end{aligned} \right\} \dots (2),$$

hat. Hier sind $\varphi_1(y)$ und $\varphi_2(y)$ Lösungen der reibungslosen Gleichung

$$(U(y) - c) (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = 0 \dots (3)$$

und

$$Q(y) = \int_{y_0}^y \sqrt{i(U(y) - c)} dy, \text{ mit } U(y_0) - c = 0 \quad (4).$$

$\varphi_1(y)$ und $\varphi_2(y)$ können so gewählt werden, daß $\varphi_1(y)$ bei $y = y_0$ regulär ist, während $\varphi_2(y)$ dort eine Singularität vom Typus $(y - y_0) \log(y - y_0)$ hat. Die Eigenschaften der Funktion $\sigma(y)$ sind unwichtig für die vorliegende Diskussion.

Zweitens kann man die Differentialgleichung (1) der Transformation

$$\eta = (y - y_0) (\alpha R)^{1/3}$$

unterwerfen. Die transformierte Differentialgleichung besitzt dann ein Fundamentalsystem von Lösungen, die konvergente Potenzreihen in $(\alpha R)^{-1/3}$ sind.

Die Störungen der parallelen Strömung müssen außer der Differentialgleichung (1) noch vier homogenen Randbedingungen genügen. Eine Störung ist gedämpft, neutral oder angefacht, je nachdem ob $c_i = \text{Im } c$ negativ, null oder positiv ist.

Es besteht auch noch allgemeine Übereinstimmung darüber, daß im Innern der Strömung ein Gebiet existiert, das eine besondere Untersuchung erfordert, weil dort die reibungslose Gleichung möglicherweise keine ausreichende Beschreibung der wirklichen Strömung liefert. Die Meinungsverschiedenheiten betreffen den mathematischen Ursprung und die Natur dieses „inneren Reibungsgebiets“.

a) Holsteins Behandlung. Die Funktion $\varphi_2(y)$ hat eine Singularität bei $y = y_0$. Da alle Lösungen der Differentialgleichung (1) bei $y = y_0$ regulär sind, konstruiert Holstein, wie vor ihm Tollmien, eine Funktion $\varphi_2^{(1)}(y, \alpha R)$, die in der Umgebung von $y = y_0$ eine bessere Annäherung an eine Lösung von (1) liefert. Diese Korrektur stellt nach Holstein den wesentlichen Einfluß der Viskosität in der inneren Reibungsschicht dar. Nach [1], S. 45 muß diese Korrektur nur innerhalb einer Umgebung von y_0 , die für $\alpha R \rightarrow \infty$ auf einen Punkt zusammenschrumpft berücksichtigt werden.

b) Die Behandlung von Lin und Wasow. Im Gegensatz zu dem von Holstein untersuchten Phänomen, hat das innere Reibungsgebiet, das in [2], S. 131 und in [3], S. 870 diskutiert wird, mit dem Verhalten der Lösung $\Phi_2(y, \alpha R)$ außerhalb einer Umgebung von $y = y_0$ zu tun. Diese Umgebung kann beliebig klein sein, ist aber unabhängig von αR . Um dies klarer auszuführen, bezeichnen wir, wie in [3], die drei krummlinigen Sektoren, in welche die Kurve $\text{Re } Q(y) = 0$ die komplexe y -Ebene zerlegt,

mit S_i ($i = 1, 2, 3$). In [3], Satz 2 und 3 wurde bewiesen, daß die asymptotische Beziehung $\Phi_2(y, \alpha R) \sim \varphi_2(y)$ nicht in einem ganzen, den Punkt $y = y_0$ umgebenden Ring der y -Ebene gilt, sondern nur in zwei von den drei Sektoren S_i . Im dritten Sektor nähert sich $\Phi_2(y, \alpha R)$ für $\alpha R \rightarrow \infty$ überhaupt keinem endlichen Grenzwert, vorausgesetzt, daß y außerhalb einer Umgebung von y_0 bleibt.

Aus dieser Tatsache folgt leicht (s. [3], S. 870), daß es für gedämpfte Störungen ein inneres Reibungsgebiet von endlicher Breite gibt (zum mindesten, wenn die Dämpfung nicht allzu klein ist), während für angefachte Störungen keine Reibungsschicht existiert.

c) Holsteins Einwände. Die drei Kurven $\text{Re } Q = 0$ sind auch die Linien, über die hinaus die asymptotischen Darstellungen der Lösungen $\Phi_3(y, \alpha R)$ und $\Phi_4(y, \alpha R)$ in (2) in unstetiger Weise fortgesetzt werden müssen (s. [3], Satz 1). Aber da der Beitrag dieser Lösungen zu einer wirklichen Störung, wie man leicht zeigt, für $\alpha R \rightarrow \infty$ nach null strebt, kann diese Eigenschaft von Φ_3 und Φ_4 nicht unmittelbar für das Auftreten des inneren Reibungsgebiets verantwortlich sein. Wenn wir richtig verstehen, ist dies der Kern von Holsteins Kritik auf S. 49 von [1]. Die Antwort ist, daß es in der Tat nicht das asymptotische Verhalten von Φ_3 und Φ_4 , sondern das von Φ_2 ist, welches unser inneres Reibungsgebiet verursacht. Es ist allerdings richtig, daß die asymptotischen Eigenschaften von Φ_3 und Φ_4 eine entscheidende Rolle in der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von Φ_2 spielen (s. [3], S. 856–864). Der Zusammenhang der Eigenschaften der Lösungen Φ_3 und Φ_4 mit denen von Φ_1 und Φ_2 hat auch Lin zu der Entdeckung des exzeptionellen dritten Sektors geführt. In Hinblick auf Satz 3 in [3] ist es jetzt klar, daß die zwei inneren Reibungsschichten, die Lin in [2], S. 133 erwähnt, in Wirklichkeit die Grenzen eines Reibungsgebietes endlicher Breite sind.

Holsteins Arbeit enthält noch einige andere Bemerkungen, mit denen die Verfasser nicht völlig übereinstimmen. Aber es ist vielleicht besser, die Diskussion auf die oben erwähnten Punkte zu beschränken, in denen die Meinungsverschiedenheiten am klarsten zum Ausdruck kommen.

Schrifttum:

- [1] H. Holstein: Über die äußere und innere Reibungsschicht bei Störungen laminarer Strömungen Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 25–49.
- [2] C. C. Lin: On the Stability of Two-dimensional Parallel Flows. Part I, General Theory, Quarterly of Appl. Math., Bd. III (1945), S. 117–142.
- [3] W. Wasow: The Complex Asymptotic Theory of a Fourth Order Differential Equation of Hydrodynamics. Ann. of Math. 49 (1948), S. 852–871. Cambridge, Mass., USA. C. C. Lin. Los Angeles, Cal., USA. W. Wasow.

Erwiderung

C. C. Lin kam in der oben unter [2] zitierten Arbeit zu dem Ergebnis, daß es bei laminaren Strömungen mit überlagerten Störschwingungen für den gedämpften, neutralen und angefachten Fall 2 bzw. 1 bzw. 0 innere Reibungsschichten gibt. Demgegenüber stellte ich in [1] fest, daß dieses Zahlentripel gleich 1, 1, 1 ist. Gemäß vorstehender Zuschrift von Lin und Wasow ist nunmehr Lins Ergebnis in 1, 1, 0 umgeändert. Hierdurch ist größere, wenn auch nicht vollständige Übereinstimmung mit meinem Ergebnis erzielt. Für eine Revision meiner kritischen Bemerkungen in [1] sehe ich keinen Anlaß.

Southsea, Hants, England. H. Holstein.